TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Elina Ala-Maakala

Matemaattinen ajattelu ja sähköiset ylioppilaskokeet

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Marraskuu 2016

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

ALA-MAAKALA, ELINA: Matemaattinen ajattelu ja sähköiset ylioppilaskokeet

Pro gradu -tutkielma, 49 s., 2 liites.

Matematiikka

Marraskuu 2016

Tiivistelmä

Lukion uusi opetussuunnitelma astui voimaan syksyllä 2016 ja matematiikan sähköinen ylioppilaskoe kirjoitetaan ensimmäistä kertaa keväällä 2019. Lähtökohdat antavat aihetta matemaattisen ajattelun ja sähköisten ylioppilaskirjoitusten tutkimukselle. Matemaattinen ajattelu ja ratkaisuprosessien täsmällinen perusteleminen nousevat keskiöön, kun teknisten apuvälineiden avulla on mahdollista ratkaista monimutkaisiakin tehtäviä kohtuullisen yksinkertaisesti. Ajatteluprosessin ja matemaattisen ymmärtämisen lähtökohta on matematiikan universaali kieli. Reaalimaailman symbolien vaihtaminen matematiikan abstraktille symboliselle kielelle johtaa lopulta matemaattiseen osaamiseen. Matemaattiselle tiedolle on ominaista jäsentyneisyys, kerroksellisuus ja kumulatiivisuus. Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin kehittämän matemaattisen osaamisen -mallin pohjalta on Pro gradu -tutkielmassa analysoitu neljää useimmiten ylioppilaskirjoituksissa esiintynyttä tehtävätyyppiä. Tehtävien analysointi osoitti, että matematiikan sähköisen ylioppilaskokeen vuoksi matemaattinen ymmärtäminen on oppimisen kannalta yhä keskeisempää. Perusteleminen ja täsmällinen jäsentäminen todistustekniikoita unohtamatta, on tulevaisuudessa matematiikassa tärkeää. Tekniset apuvälineet nopeuttavat matemaattisen kielen kirjoittamista ja antavat mahdollisuuksia soveltavampien tehtävien ratkaisemiseen. Sähköistymisen haasteita voidaan ratkaista yhdessä muiden Euroopan maiden kanssa, joilla on käytössään sähköinen ylioppilaskoe.

Avainsanat: matemaattinen ajattelu, matemaattinen osaaminen, matematiikan sähköinen ylioppilaskoe

Sisältö

Johdanto 5

1 Lukion opetussuunnitelman perusteet **6**
1.1 Matematiikan pitkä oppimäärä 6
1.2 Pitkän matematiikan kurssien keskeiset tavoitteet 7
1.3 Vertailu lukion vanhaan opetussuunnitelmaan 7

2 Matematiikan sähköinen ylioppilaskoe **9**
2.1 Arviointi matematiikan sähköisessä ylioppilaskokeessa 10
2.2 Sähköinen ylioppilaskoe Euroopassa 11

3 Matemaattinen tieto ja ajattelu tehtävien ratkaisemisessa **12**
3.1 Proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto 12
3.1.1 Matemaattinen ajattelu 13
3.1.2 Ajattelun nelikenttä lukiossa 14
3.2 Matemaattinen osaaminen 15
3.2.1 Matemaattinen ajattelu ja tekniikka 17

4 Matematiikan tehtävien valinta **19**
4.1 Matematiikan tehtävien ratkaisumalli 19
4.2 Ylioppilaskokeissa esiintyneet matematiikan aihealueet vuosina 2012-2016 20
4.3 Tehtävien esittely 21
4.3.1 Pisteen etäisyys suorasta ja käsitteellinen ymmärtäminen . . . 22
4.3.2 Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava ja proseduraalinen sujuvuus 22
4.3.3 Juurifunktion suurin ja pienin arvo ja strateginen kompetenssi 22
4.3.4 Epäoleellinen integraali ja mukautuva päättely 23

5 Tehtävien analysointi **24**
5.1 Käsitteellinen ymmärtäminen 24
5.1.1 Tehtävän ajatteluprosessi 26
5.1.2 Tehtävään 1. liittyvä matemaattinen teoria 26
5.2 Proseduraalinen sujuvuus 27
5.2.1 Tehtävä 2. a-kohta 29
5.2.2 Tehtävä 2. b-kohta 29
5.2.3 Tehtävään 2. liittyvä matemaattinen teoria 30
5.3 Strateginen kompetenssi 31
5.3.1 Tehtävän 3. ratkaisumalli 31
5.3.2 Matemaattinen ajattelumalli tehtävän ratkaisuun 34
5.3.3 Tehtävään 3. liittyvä matemaattinen teoria 35
5.4 Mukautuva päättely 38

5.4.1 Tehtävän 4. ratkaisuprosessi . . . 38
5.4.2 Tehtävän 4. matemaattinen ajatteluprosessi . . . 38
5.4.3 Tehtävään 4. liittyvä matemaattinen teoria . . . 39
5.4.4 Yhteenveto . . . 41

6 Pohdinta **42**
6.1 Sähköisten ylioppilaskokeiden hyödyt ja haasteet . . . 42
6.1.1 Koulut ja tietotekninen kehitys . . . 43
6.1.2 Vertailu lukiolaisten nelikenttään ja matemaattiseen ajatteluun 44
6.1.3 Kritiikkiä ja avoimia kysymyksiä sähköisestä ylioppilaskokeesta 44
6.2 Jatkotutkimuskohteet . . . 45
Viitteet . . . 47
Liitteet . . . 50

Johdanto

Matematiikalla on tärkeä rooli yhteiskunnan eri osa-alueilla. Matematiikka liittyy olennaisena osana arkipäivään matemaattisten sovelluskohteiden muodossa. Matematiikka on perusta ja työväline muille tieteille. Koulutuksessa matematiikalla on keskeinen rooli heti koulupolun alkutaipaleelta lähtien. Yhteiskunnan nopean tietoteknisen kehityksen johdosta myös koulutusjärjestelmän on vastattava digitalisaatioon. Ylioppilaskirjoitukset sähköistyvät vähitellen siten, että keväällä 2019 kirjoitetaan kaikki oppiaineet sähköisesti. Samalla Suomen koulujen matematiikan opetuksen tasosta ollaan huolestuneita. Uusimman PISA-tutkimuksen mukaan suomalaisten nuorten sijoitus matematiikan osaamisessa on laskenut kymmenen pykälää edellisestä tutkimuksesta [1].

Tässä Pro gradu -tutkielmassa keskitytään tarkastelemaan neljää pitkän matematiikan tehtävää. Tehtävät on poimittu Pitkä matematiikka -kirjasarjasta [2] [3] [4] [5]. Valitut tehtävät ovat sellaisia, joita on esiintynyt useasti pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa vuodesta 2012 lähtien. Tutkimuksessa pohditaan tehtävien vaatimaa matemaattista ajatusprosessia ja vertaillaan niiden testaamaa osaamista uuteen lukion opetussuunnitelmaan. Matematiikan ylioppilaskoe tulee väistämättä muuttumaan sähköistymisen myötä, joten tutkimuksessa pohditaan myös miten tehtävät soveltuvat sähköiseen koeympäristöön ja mitä haasteita tehtävistä aiheutuu sähköisessä matematiikan ylioppilaskokeessa.

Tutkielman alussa tutustutaan lukion opetussuunnitelman perusteisiin pitkän matematiikan osalta. Teoreettisessa osassa selvitetään tärkeimpiä matemaattiseen ajatteluun liittyviä näkökulmia ja paneudutaan matemaattisen tiedon luonteeseen. Tässä osassa kerrotaan myös muuttuvasta matematiikan ylioppilaskokeen rakenteesta. Luvussa 4 esitellään tutkielmaan tarkempaan analysointiin valitut tehtävät. Luvussa 5 keskitytään analysoimaan valittuja tehtäviä matemaattisen ajattelun kautta. Valittujen tehtävien ratkaisuprosesseissa hyödynnetään teknisiä apuvälineitä, joita opiskelijoilla on käytössään matematiikan sähköisessä ylioppilaskokeessa. Pohdintaosuus sisältää ajatuksia matemaattisesta ajattelusta, ymmärtämisen merkityksestä sekä tarkastelee sähköistymisen tuomia hyötyjä ja haasteita niin ajattelun kuin tekniikan tasolla. Pohdintaosuuden lopuksi ehdotetaan tutkimuksen aikana heränneitä jatkotutkimuskysymyksiä.

Luku 1

Lukion opetussuunnitelman perusteet

Lukio antaa monipuolisen yleissivistävän koulutuksen samalla opettaen ja kasvattaen opiskelijoita jatko-opintoihin ja työelämään yhteiskunnan tekijöiksi. Lukion aikana opiskelija rakentaa ymmärrystä maailmankuvastaan ja identiteetistään toimien vastuullisesti ja yhteisöllisesti sekä arvioiden toimintaansa kriittisesti. Lukion opetussuunnitelman perusteet määrittelevät aihekokonaisuudet, jotka ovat yhteiskunnallisesti merkittäviä kasvatukseen ja koulutukseen liittyviä haasteita. Aihekokonaisuudet on otettava soveltuvin osin huomioon oppiainekohtaisissa opetussuunnitelmissa. Aihekokonaisuudet sisältävät muun muassa yrittäjyyteen, teknologiaan ja yhteiskuntaan, hyvinvointiin ja globalisaatioon, kulttuuriin ja kansainvälisyyteen, monilukutaitoon sekä kestävään kehitykseen liittyviä teemoja. [6]

1.1 Matematiikan pitkä oppimäärä

Lukion matematiikan ainekohtaisessa opetussuunnitelmassa matematiikan opetuksen keskeisenä tehtävänä on tutustuttaa opiskelija matemaattisen ajattelun malleihin ja matematiikan rakenteisiin oppien samalla käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä. Lukion aikana opiskelijan laskutaito, ongelmien ratkaisutaito ja ilmiöiden mallintaminen kehittyvät. Pitkän matematiikan opintojen aikana opiskelija sisäistää matemaattisia käsitteitä, menetelmiä ja ymmärtää matemaattisen tiedon luonnetta. Opetuksessa on kiinteästi toteutettava erilaisia työtapoja ja ohjattava opiskelijaa näkemään matematiikan laajempia kokonaisuuksia tieteen, teknologian, talouden, yrittäjyyden, terveydenhuollon ja turvallisuuden näkökulmista. [6, s. 129–131] Nyt uudessa opetussuunnitelmassa on erikseen vielä maininta teknisten apuvälineiden hyödyntämisestä opetuksessa:

> *"Opiskelija harjaannutetaan käyttämään tietokoneohjelmistoja matematiikan oppimisen ja tutkimisen sekä ongelmanratkaisun apuvälineinä. Matematiikan opiskelussa hyödynnetään muun muassa dynaamisen matematiikan ohjelmistoja, symbolisen laskennan ohjelmistoja, tilasto-ohjelmistoja, taulukkolaskentaa, tekstinkäsittelyä sekä mahdollisuuksien mukaan digitaalisia tiedonlähteitä. Tärkeää on myös arvioida apuvälineiden hyödyllisyyttä ja käytön rajallisuutta."* [6, s. 129]

1.2 Pitkän matematiikan kurssien keskeiset tavoitteet

Seuraavissa kappaleissa tarkastellaan vielä opetussuunnitelman (LOPS2015) keskeisiä tavoitteita pitkän matematiikan kursseihin, joista tehtävät on valittu.

Polynomifunktiot- ja yhtälöt (MAA2)

Tämän lukion ensimmäisen vuoden kurssin tavoitteena on, että opiskelija harjaantuu polynomifunktioiden käsittelyssä, osaa ratkaista toisen ja korkeamman asteen polynomiyhtälöitä sekä yksinkertaisia epäyhtälöitä. Lisäksi keskeisenä tavoitteena on, että opiskelija osaa hyödyntää teknisiä apuvälineitä polynomifunktion ominaisuuksien tutkimisessa ja sovellustehtävien ratkaisuissa. [6, s. 131]

Analyyttinen geometria (MAA5)

Analyyttinen geometria -kurssin keskeinen tavoite on luoda opiskelijalle ymmärrys analyyttisen geometrian, geometrian ja algebran käsitteiden välille. Opiskelija luo teknisten apuvälineiden avulla käsityksen pisteen, suoran, ympyrän ja paraabelin ominaisuuksista. Opiskelija ymmärtää itseisarvon käsitteen ja osaa ratkaista itseisarvoyhtälöitä ja -epäyhtälöitä. [6, s. 132]

Juuri- ja logaritmifunktiot (MAA8)

Kurssin keskeisenä tavoitteena on, että opiskelija osaa hyödyntää derivaattaa tutkiessaan juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioita. Opiskelija tuntee juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioiden ominaisuudet ja osaa yhdistellä tietoja ja taitoja sovellustehtäviä ratkaistaessaan. Lisäksi kurssin oppimistavoitteena on, että opiskelija osaa käyttää teknisiä apuvälineitä soveltuvin osin tehtävien ratkaisemisessa. [6, s. 134]

Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi (MAA13)

Viimeisen valtakunnallisen syventävän kurssin tavoitteena on syventää opiskelijan teoreettista tuntemusta differentiaali- ja integraalilaskennasta. Käänteisfunktiot, funktioiden ja lukujonojen raja-arvot äärettömyydessä sekä epäoleelliset integraalit ovat kurssin keskeisiä aihealueita. [6, s. 136]

1.3 Vertailu lukion vanhaan opetussuunnitelmaan

Tutkimuksessa analysoitavat tehtävät on valittu lukion vanhaa vuoden 2003 opetussuunnitelmaa noudattavista oppikirjoista. Suurin ero vuoden 2003 ja vuoden 2015 opetussuunnitelmien välillä on kaikille matematiikan lukijoille yhteinen pakollinen kurssi Luvut ja lukujonot (MAY1), jonka tehtävänä on lisätä opiskelijoiden kiinnostusta matematiikkaa kohtaan. Opiskelijat saavat kurssin aikana käsityksen matematiikan moninaisuudesta. Tämän kurssin jälkeen opiskelijat valitsevat opiskelevatko pitkän vai lyhyen oppimäärän matematiikkaa. [6, s. 130]

Toinen merkittävä muutos opetussuunnitelmien välillä on kurssin Lukuteoria ja logiikka (MAA11) muuttuminen kurssiksi Lukuteoria ja todistaminen. Kurssilla painotetaan lukuteorian hallinnan lisäksi todistamisen periaatteita. [6, s. 135]. Muuten opetussuunnitelmien keskeiset tavoitteet ovat pysyneet samanlaisina. Ainoastaan uudessa opetussuunnitelmassa jokaisen kurssin kohdalla on maininta soveltuvien teknisten apuvälineiden hyödyntämisestä tehtävien ratkaisemisessa. Lisäksi yhteisestä matematiikan pakollisesta kurssista johtuen kurssien järjestys poikkeaa aiemmasta opetussuunnitelmasta. Kurssien järjestystä on muutettu, jotta myöhemmillä kursseilla voidaan hyödyntää monipuolisemmin eri tehtävätyyppejä. [7, s. 118–124]

Luku 2

Matematiikan sähköinen ylioppilaskoe

Lukion opetussuunnitelma ohjaa voimakkaasti ylioppilastutkintoa. Lukion valtakunnalliset opetussuunnitelman perusteet antavat raamit kuntatason ja koulutuksen järjestäjien opetussuunnitelmien laadintaan. [8, s. 25] Suomi on siirtymässä vaiheittain syksystä 2016 alkaen sähköisiin ylioppilaskirjoituksiin. Matematiikka on viimeinen sähköiseksi siirtyvä ylioppilaskoe. Tämä tapahtuu keväällä 2019 ja nyt syksyllä 2016 lukion aloittaneet kirjoittavat sähköisen matematiikan ylioppilaskokeen. [9] Tämä on seurausta Jyrki Kataisen hallitusohjelmasta, johon kirjattiin ylioppilastutkinnon kehittäminen ja erityisesti tieto- ja viestintätekniikan käyttöönotto ylioppilaskirjoituksissa asteittain [10, s. 33].

Sähköiseen ylioppilaskokeeseen siirtyminen ei ole ensimmäinen muutos Suomen ylioppilaskokeiden historiassa. Kivelä [11] muotoilee sähköisyyteen siirtymisen kehitysketjuna, joka alkoi graafisten laskinten sallimisesta matematiikan ylioppilaskokeessa ja jatkui vuonna 2012, kun symboliset laskimet sallittiin ylioppilaskirjoituksissa. Nyt symbolinen laskenta siirtyy CAS *(Computer algebra system)* -tietokoneohjelmistoihin, ja matematiikan ylioppilaskirjoitus kokonaisuutena eri ohjelmistoineen seuraa yhteiskunnan tietoteknistä kehitystä.

Ylioppilaskokeissa kokelaat esittävät tietonsa, taitonsa ja kypsyytensä. Lukiolain 18§ mukaan ylioppilastutkinnon tavoitteena on selvittää opiskelijoiden taito omaksua opetussuunnitelman määrittelemät tiedot ja taidot sekä osoittaa lukiokoulutuksen antama kypsyys. [12] Matematiikan sähköinen ylioppilaskoe on kaksiosainen. Osassa tehtävissä ei sallita teknisten apuvälineiden käyttöä. Kun koeympäristön laskinominaisuudet on aktivoitu, ei näihin tehtäviin voi enää palata. Kokeessa käytettävät laitteet ovat kokelaan omia tai koulutuksen järjestäjän hankkimia. Ylioppilaskokeessa kokelaalla on päätelaitteellaan käytössään MAOL-digitaulukot, LibreOfficen tekstinkäsittely, taulukkolaskenta ja vektorigrafiikka, useampi kuvankäsittelyohjelma, kuvaajien piirto-ohjelmia sekä symbolisen laskennan ohjelmistoja. Matematiikan sähköinen ylioppilaskoe sisältää seuraavanlaisia tehtävätyyppejä [9]:

1. Valinta- ja yhdistelytehtävät
2. Yksinkertaiset tuottamistehtävät
3. Monipuoliset ongelmanratkaisua, analysointia sekä tiedon yhdistämistä vaativat tehtävät

Tyyppien 1 ja 2 tehtävistä osa voidaan ratkaista ilman teknisiä apuvälineitä. Tyypin 1 tehtävissä opiskelijan tulee hallita ja ymmärtää matemaattisia käsitteitä. Nämä yleensä ovat monivalintakysymyksiä. Tyypin 2 koetehtävät ovat nykyisen ylioppilaskokeen perustehtävien kaltaisia. Kokelaalta testataan perusteltujen ja loogisten vastausten antamista. Sähköisessä ylioppilaskokeessa tehtäviin liittyvät kaavat kirjoitetaan kaavaeditorin avulla. Tyypin 3 tehtävät vastaavat nykyisen ylioppilaskokeen vaativampia tehtäviä. Kokelaalta edellytetään hyviä jäsennys- ja soveltamistaitoja. Sähköisyys mahdollistaa monipuolisemmat tehtävänannot. Matemaattiset mallit voivat symbolisen laskennan takia olla monimutkaisempia ja tehtävät voivat sisältää muun muassa artikkeleita, kuvia, simulaatioita tai tilastoja. [9]

2.1 Arviointi matematiikan sähköisessä ylioppilaskokeessa

Suomalaisen ylioppilastutkinnon arviointi tähtää tasapuolisuuteen ja tulosten vertailukelpoisuuteen. Tutkinnon arvostelu on kaksiportainen. [8, s. 27] Laissa ylioppilastutkinnon järjestämisestä 8§ määritellään tarkasti kokelaiden koesuoritusten arvioinnista:

> *"Koesuoritukset tarkastaa ja arvostelee valmistavasti lukiokoulutusta järjestävän oppilaitoksen asianomaisen aineen opettaja ja lopullisesti ylioppilastutkintolautakunta."* [13]

Opiskelijat ovat tasapuolisessa asemassa saman tutkintokerran puitteissa, koska oman aineen opettajan tarkastuksen jälkeen ylioppilastutkintolautakunnan sensorit tarkastavat koesuoritukset. Arvioinnin porrastuksen tarkoituksena on myös turvata oppiaineiden ja eri tutkintokertojen välinen tasapuolisuus. Sensorien arvostelu noudattaa ylioppilastutkinnon matematiikan ainejaoksessa yhteisesti päätettyjä arvostelukriteereitä. Opettajien arvostelun apuna on usein opettajajärjestöjen korjausohjeita ja kevään 2013 jälkeen myös ylioppilaslautakunnan julkaisemat hyvän vastauksen piirteet. [8, s. 27]

Kokelaan hyvästä suorituksesta näkee selkeästi, kuinka ratkaisuun on päädytty. Hyvässä vastauksessa esiintyy tarpeeksi välivaiheita, tarvittavia ja täsmällisiä perusteluja sekä lopputulos. Lisäksi mahdolliset koordinaatistot, diagrammit, kuviot ja funktioiden kuvaajat on esitettävä selkeästi. Arvosteluohjeissa mainitaan, että pienet laskuvirheet eivät merkittävästi alenna pistemäärää, etenkään jos virheen johdosta tehtävä ei muutu luonteeltaan tai jos virheestä ei seuraa mahdoton tulos. Virheestä vähennetään pisteitä enemmän, jos tehtävän tarkoitus on testata kokelaan kykyä tehdä virheettömiä laskutoimituksia tai jos virhe oleellisesti helpottaa tehtävän ratkaisua. Tällainen tehtävää oleellisesti helpottava virhe voisi olla esimerkiksi derivoinnissa sisäfunktion derivaatan unohtaminen, jolloin ratkaisuun johtava yhtälö saattaa helpottua huomattavasti. Lisäksi mahdottomaan tulokseen johtava virhe voisi olla esimerkiksi ratkaisuprosessi, jossa kappaleen tilavuus tai pinta-ala saa negatiivisen arvon. Tällaisella arviointitavalla kokelaita kannustetaan arvioimaan kriittisesti matemaattisen ratkaisuprosessin tuloksia ja niiden järkevyyttä. [14, s. 5]

2.2 Sähköinen ylioppilaskoe Euroopassa

Suomi ei ole ensimmäinen sähköisiin matematiikan ylioppilaskokeisiin siirtyvä maa, vaan Euroopassa Tanskassa, Norjassa, Alankomaissa, Slovakiassa ja Puolassa on käytössä sähköinen koejärjestelmä. Hietakymin [15] harjoitteluraportin perusteella Tanskan kokeen malli on Suomessa käyttöönotettavan kokeen kaltainen. Tanskassa opiskelijoilla on kaksiosaisen ylioppilaskokeen toisessa osassa kuitenkin mahdollisuus käyttää internetiä. Suomessa toistaiseksi kokelailla ei ole pääsyä internetiin kokeen aikana. Tanskassa sähköisyys on mahdollistanut aineistojen hyödyntämisen ja lukion oppimäärän ylittävien tehtävien tekemisen, jolla voidaan testata kokelaiden uuden asian sisäistämistä ja tiedon soveltamista.[15]

Luku 3

Matemaattinen tieto ja ajattelu tehtävien ratkaisemisessa

Matematiikan säännönmukainen ja täsmällinen rakenne poikkeaa merkittävästi muista tiedon alueista. Ajatteluprosessin ja ymmärtämisen lähtökohta on matematiikan universaali kieli. Matematiikan käsitteet ja määritelmät ilmaistaan matemaattisten lauseiden ja symbolien avulla. Symbolit ovat aakkoset matematiikan sanaviidakossa. Matemaattinen kieli itsessään on täsmällistä, luotettavaa, teoreettista ja abstraktia. Lukiossa käsitteiden täsmällinen määrittely sekä matemaattisten symbolien merkityksen ymmärtäminen korostuvat kaikissa tehtävissä peruslaskutoimituksista aina matematiikan sovellustehtäviin asti. Tehtävien tavoitteena on matematiikan oppiminen. Matemaattisena tietona pidetään erilaisia oppimiseen johtavia toimintoja, kuten lausekkeen muodostaminen tai yhtälön rakenteen ja ominaisuuksien tunnistaminen. [16, s. 199–202]

Matemaattisen tiedon avulla opitaan matemaattista ajattelua, mutta usein tietoa ja ajattelua käytetään synonyymeinä, vaikka niillä onkin hieman erilainen merkitys. Matematiikan oppimisessa symboleiden avulla kuvattu tieto käsitetään matematiikan rakenteen oppimisena eli tietämisenä. Matemaattinen tieto on jäsentynyttä, kerroksittaista ja uusi opittu tieto on vahvasti kumulatiivista. [16, s. 203–204]

3.1 Proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto

Useat tiedon luonteen tutkijat, muun muassa Hiebert & Lefevre tai Kluwe, ovat määritelleet proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon. Tässä yhteydessä käytän kuitenkin Haapasalon [17] täydennettyjä määritelmiä näille tiedon lajeille. Haapasalo on muokannut perinteisen konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon käsitteen ajan vaatimaan määritelmään:

> *”Konseptuaalinen tieto on semanttinen verkko, jonka solmujen ja linkkien tulkitsemiseen ja rakentamiseen yksilö kykenee osallistumaan, tiedostaen ja ymmärtäen toimintansa perusteet sekä logiikan.”*[17]

Konseptuaalinen tieto on siis verkko, jossa käsitteet ja asiatiedot liittyvät yhteen. Uutta tietoa kehittyy tiedon rakentamisen seurauksena, kun jäsennetään tiedon eri sisältöjä ja niiden riippuvuuksia. [18, s. 33–34]

Haapasalo määrittelee proseduraalisen tiedon modernin määritelmän puolestaan seuraavasti:

> *”Proseduraalinen tieto tarkoittaa dynaamista ja tarkoituksenmukaista sääntöjen, menetelmien tai algoritmien suorittamista käyttäen hyväksi tiettyjä esitystapoja. Tämä edellyttää tavallisesti näiden esitystapojen pohjana olevien tietojärjestelmän syntaksin ja esitysmuotojen ymmärtämistä, mutta ei sen sijaan välttämättä näiden ominaisuuksien tietoista ajattelemista, ainakaan mikäli suoritus on automatisoitunut.”* [17]

Proseduraalinen tieto pitää sisällään säännöt, joiden avulla tietoa voidaan palauttaa mieleen ja soveltaa. Proseduraalinen tieto tarvitsee taitoa, jotta se on sovellettavissa ja taas toisinpäin, ilman tietoa ei ole taitoa. [18, s. 33–34]

Proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon pohjalta matemaattinen ajattelu on merkityksellisten matemaattisten tietojen prosessointia ja ymmärtämistä. Oppijan tiedon prosessointi voi olla tietoista ongelmanratkaisua, opittavan asian ymmärtämistä tai oppijan oman mielenkiinnon ja motivaation ohjaamaa itsenäistä tietojen tutkimista. Osana oppijan tietorakennetta sisältyy myös tietoisuus ajatteluprosesseista sekä niiden hallinnasta. Oppijan kyvyt, asenteet, uskomukset sekä tietopohja antavat ajatteluprosessille suunnan. [19] Konseptuaalista ja proseduraalista tietoa ei voi suoraan jaotella kahteen osaan. Oppimistilanteessa opetettava matemaattinen aihe sekä pedagogiset näkökulmat vaikuttavat olennaisesti siihen, miten proseduraalista ja konseptuaalista tietoa tulkitaan. [17]

Yrjönsuuri [16] jakaa matemaattisen tiedon deklaratiiviseen tietoon sekä proseduraaliseen tietoon. Deklaratiivinen tieto on tosiasiatiedon kaltaista. Tosiasiatieto voidaan osoittaa todeksi. Deklaratiivinen tieto sisältää faktoja, väittämiä ja malleja. Proseduraalinen tieto on toiminnallista tietoa. Toiminnallista tietoa ovat tehtävien ratkaisuissa käytettävät kaavat ja algoritmit. Samaa tietoa käytetään toistuvasti, josta hyvänä esimerkkinä ovat laskualgoritmit. Tiedon käytössä toistojen määrä johtaa parempaan tiedon hallittavuuteen. Tästä esimerkkinä on laskutaito, jonka sanotaan kehittyvän harjoittelun myötä. [16, s. 203–204]

3.1.1 Matemaattinen ajattelu

Matemaattisen ajattelun käsite on vaikea määritellä täsmällisesti, sillä käsitteen määrittelyyn vaikuttavat yksilön tulkinnat ja tausta. Matemaattinen ajattelu voidaan jakaa viiteen eri lähestymistapaan.

1. Psykometrinen
2. Informaation prosessointia tutkiva
3. Antropologinen
4. Pedagoginen
5. Matemaattinen

Psykometrisessä lähestymistavassa matemaattinen ajattelu nähdään karttana, jossa on eri kokoisia ja eri puolilla sijaitsevia alueita. Toiset alueet ovat ajattelun kannalta keskeisempiä kuin toiset. Keskeinen tutkittava käsite on yksilön suhteen muuttumattomat kyvyt. Tämä lähestymistapa ei ota huomioon sitä, että oppijalla voi olla heikko osaaminen jollain matematiikan osa-alueella esimerkiksi geometriassa ja oppija on silti erittäin lahjakas algebrassa. Informaation prosessointia tutkivassa lähestymistavassa keskitytään matemaattiseen ongelmanratkaisuun. Tulkintaprosesseissa oppija yrittää ymmärtää ongelman, ja ratkaisun aikana oppija soveltaa hallitsemiaan matemaattisia toimintoja ratkaistakseen ongelman. Antropologinen lähestymistapa tarkastelee matemaattista ajattelua eri kulttuurien näkökulmasta. Universaalista kielestään huolimatta matemaattiseen ajatteluun vaikuttavat kunkin kulttuurin historia, toimintatavat sekä kielen rakenne. Antropologinen lähestymistapa näkyy matematiikan sovelluksissa sanallisissa tehtävissä, joissa esiintyvät kansallisten kulttuurien ominaispiirteet. Pedagogisessa lähestymistavassa opettamisen näkökulma on lähtökohta matemaattisen ajattelun tarkastelemiseen. Matemaattinen ajattelu ja oppiminen on kontekstisidonnaista, johon vaikuttavat oppijoiden asenteet ja motivaatio opetettavaa asiaa kohtaan sekä oppijoiden keskinäiset sosiaaliset suhteet. Matematiikan lähestymistavassa tutkitaan, mitkä piirteet ovat keskeisimpiä matemaattisessa ajattelussa, kun matematiikkaa opiskellaan tieteenä. Matemaattiseen ajatteluun liitetään keskeisesti ajattelun esteettisyys, itseluottamus, rakenteiden ymmärtäminen, ongelmien tulkinta, visuaalinen päättely, käänteinen ajattelu sekä ajattelun joustavuus. Hyvällä itseluottamuksella varustettu oppija pyrkii lyhyeen ja täsmälliseen ratkaisuun, joissa on havaittavissa oppijan kyky hyödyntää erilaisia matemaattisia ongelmia ratkaisussa. Ongelmien tulkinnassa oppija muuttaa ongelman visuaaliseen tai muuhun ratkaisua helpottavaan muotoon. Käänteisessä ajattelussa oppijalla on selvillä ongelman ratkaisu, jolloin hän päättelee ratkaisuprosessin. Ajattelun joustavuus on oppijan kyky käsitellä tehtäviä eri lähestymistavoilla. [19]

3.1.2 Ajattelun nelikenttä lukiossa

Lukion uudessa opetussuunnitelmassa mainitaan matemaattisen ajattelun taidot keskeisenä matematiikkaa ohjaavana tavoitteena [6]. Näiden lukion opetussuunnitelman tavoitteiden toteutumista arvioidaan ylioppilaskirjoituksilla. On siis selvää, että matemaattisen ajattelun taitoja arvioidaan ylioppilaskokeen tehtävissä. Joutsenlahti on väitöskirjassaan sekä artikkelissaan Matemaattinen ajattelu lukiossa [19][20] muodostanut tutkimuksensa pohjalta matemaattisen ajattelun nelikentän. Joutsenlahden tutkimusaineisto koostuu lukiolaisten kurssisuorituksista, ylioppilaskirjoitusten tuloksista, uskomus- ja asennemittauksista sekä haastatteluista. Tämän aineiston pohjalta lukiolaiset voidaan jakaa kypsyjiin, menestyjiin, suoriutujiin sekä pettyjiin. Suoriutujien ryhmä sisältää myös alaryhmän luovuttajat. [19][20] Pohdintaosuudessa tarkastellaan, kuinka matematiikan sähköinen ylioppilaskoe tulee vaikuttamaan lukiolaisten nelikenttään.

Kypsyjät

Kypsyjiin kuuluvat lukiolaiset motivoituivat opiskelusta lukio-opintojen loppuvaiheessa. Heidän yläkouluaikainen matematiikan opiskelu ei ollut lukioon riittävällä tasolla. Kotitehtävät tehtiin tuntitehtävien mallin mukaisesti ilman ajatteluprosessia. Muutamalla opiskelijalla oppisisältökokonaisuuksien ymmärtäminen ja tietorakenteen sulautuminen tapahtuivat vasta lukion lopussa. Opiskelijoiden tunnollinen työ ei tuottanut tulosta, koska asiakokonaisuudet eivät olleet jäsentyneet. Matemaattinen ajattelu tuli sille tasolle kuin opiskelijan kyvyt edellyttivät, sillä tunnollinen työ ei mennyt hukkaan, vaan oppisisällöt olivat muistissa. Opiskelijat tarvitsivat vain riittävästi aikaa asioiden jäsentämiseen ja käsittelyyn. [19]

Menestyjät

Opiskelijoilla, jotka kuuluivat tähän ryhmään, lukio-opinnot ennustivat hyvin ylioppilaskirjoituksissa menestymisen. Opiskelijat suhtautuivat koulunkäyntiin positiivisesti ja he käyttivät paljon aikaa matematiikan oppimiseen. Vaikeat matematiikan tehtävät nähtiin mieluisana haasteena. Opiskelijoiden matemaattinen ajattelu oli kehittynyt odotusten sekä opetussuunnitelman tavoitteiden mukaisesti ylimmille oppimisen tasoille. Menestyjien matemaattinen tietopohja perustui konseptuaaliseen tietoon. [19]

Suoriutujat ja luovuttajat

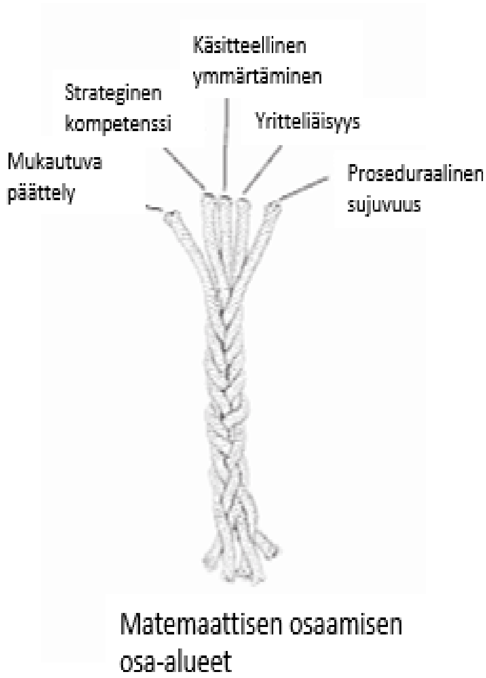
Tämän ryhmän opiskelijoiden opintomenestys ylioppilaskirjoituksissa oli lukion opintomenestyksen ennustamaa. Suoriutujat tekivät vaihtelevasti kotitehtäviä ja heidän opiskelutottumuksensa olivat puutteellisia. Opittu tieto oli helposti jäsennettävää proseduraalista tietoa ja opittavien asioiden jäsentymättömyys ja heikko aikaisempi tietopohja loivat haasteita kumulatiivisesti etenevälle opiskelulle. Luovuttajien ryhmään kuuluvat opiskelijat omasivat heikon itsetunnon matemaattisiin taitoihin ja ennakkoasenteet matematiikkaa kohtaan olivat hallitsevia. Kokeessa sallitut apuvälineet eivät olleet apuvälineitä, vaan niitä käytettiin pääasiallisina tiedon lähteinä tehtävän ratkaisuun. [19]

Pettyjät

Opiskelijat, jotka kuuluivat tähän ryhmään, olivat suoriutuneet matematiikan lukioopinnoista hyvin, mutta ylioppilaskirjoitusten menestys oli heikko. Rajattuihin tietoihin keskittyvissä kursseissa opintomenestys oli ollut kokonaisuuden hallintaa vaativia kursseja parempi. Opiskelijoiden taito analysoida tehtävän sisältöä ja rakennetta sekä ”poimia” ratkaisuun johtava prosessi oli heikohkoa. Ryhmän opiskelijoilla matemaattinen ajattelu oli ylimmällä tasolla tietyissä matematiikan osa-alueissa, jolloin ratkaisuprosessi oli ennestään tuttu. Opitut tiedot näillä osa-alueilla olivat konseptuaalista tietoa. [19]

3.2 Matemaattinen osaaminen

Matemaattinen osaaminen on laaja käsite, johon keskeisesti vaikuttaa matemaattisen ajattelun ja tiedon prosessit. Kilpatrick, Swafford ja Findell [21] määrittelevät matemaattisen osaamisen (mathematical proficiency) -mallin. Mallia on useasti käytetty aiheeseen liittyvissä tutkimuksissa (ks. Joutsenlahti 2005 [20], Tuomas Krook [22]). Matemaattisen osaamisen -malli koostuu viidestä yhteen punoutuneesta säikeestä, jotka muodostavat toisiinsa kytkeytyneen ja paksun yhtenäisen köyden (Kuva 3.1). Mallia voisi verrata myös yhteen kietoutuneisiin puun juuriin, jotka kasvattavat ja kannattelevat jykevää puuta. Samalla tavoin nämä matematiikan osa-alueet kannattelevat opiskelijaa kohti matemaattista osaamista.



Kuva 3.1: Matemaattisen osaamisen osa-alueet Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin mallin mukaan [21]

Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin [21, s. 118–120] mallin viisi tunnuspiirrettä ovat

1. Käsitteellinen ymmärtäminen (conceptual understanding): Matemaattisten käsitteiden, operaatioiden ja relaatioiden ymmärtäminen
2. Proseduraalinen sujuvuus (procedural fluency): Matemaattisten proseduurien joustava, tehokas ja tarkoituksenmukainen sekä huolellinen suorittaminen
3. Strateginen kompetenssi (strategic competence): Kyky muodostaa matemaattisia ongelmia ja suunnitella prosesseja niiden ratkaisemiseksi hyödyntäen käsitteitä ja matemaattisia toimintoja soveltuvin osin
4. Mukautuva päättely (adaptive reasoning): Loogisen ajattelun hyödyntäminen selitettäessä ja perusteltaessa matemaattista ongelmaa
5. Yritteliäisyys (productive disposition): Matematiikka koetaan hyödyllisenä ja järkevänä oppiaineena. Matemaattisen osaamisen eteen nähdään vaivaa ja ajattelun taitoja kehitetään.

Nämä mallin tunnuspiirteet ovat toisistaan riippuvaisia. Konseptuaalisessa ymmärtämisessä opiskelija ymmärtää matemaattiset käsitteet ja niiden väliset yhteydet. [21] Krook [22] on sivuainetutkielmassaan jaotellut pitkän matematiikan tehtäviä matemaattisen osaamisen -mallin osa-alueisiin. Konseptuaalisen ymmärtämisen osa-alueen tyypilliset tehtävät alkavat ”Selosta”- tai ”Määrittele”-sanoilla, jotka testaavat opiskelijan käsitteiden hallintaa. Lisäksi tehtävät voivat olla yksinkertaisia esimerkiksi suoran yhtälöihin liittyviä tehtäviä, joissa opiskelijalta vaaditaan abstraktia ajattelua sekä tietoa ja analysointia matemaattisten objektien ominaisuuksista.

Proseduraalinen sujuvuus edellyttää opiskelijalta proseduurien tarkoituksenmukaista ja tilanteeseen sopivaa käyttöä. Tämä piirre on laskutaito, jossa opiskelija osaa hyödyntää erilaisia proseduureja täsmällisesti ja tehokkaasti. [21] Krook mainitsee tyypillisiksi tehtäviksi mekaaniset tehtävät, jotka voidaan ratkaista ennalta tiedettyjen laskusääntöjen avulla. Tällaisia tehtäviä ovat esimerkiksi mekaaniset yhtälönratkaisu ja -sievennystehtävät tai funktion derivaatan laskemiseen liittyvät tehtävät. Sanalliset rutiinitehtävät kuuluvat myös tähän osa-alueeseen, koska tehtävän ratkaisuun on olemassa ennalta opittu periaate. [22]

Strateginen kompetenssi liittyy olennaisesti ongelmanratkaisuun, jossa ennalta opittu ratkaisuprosessi ei ole opiskelijalle tuttu. Opiskelijan on osattava soveltaa aiemmin opittuja tietoja ja ratkaisustrategioita. Tehtävän ratkaisun kannalta hyvin suunniteltu on puoliksi tehty. Opiskelijan on etsittävä tehtävänannosta ratkaisuun johtavat tarpeelliset tiedot. [21] Opiskelijan on esimerkiksi piirrettävä sanallisen tehtävänannon perusteella apukuva, josta hän pystyy päättelemään ja ratkomaan kysyttyjä suureita. Tähän osa-alueeseen kuuluvat tehtävät ovat sanallisia tehtäviä, jotka liittyvät todennäköisyyslaskentaan, prosenttilaskennan, geometrian tai differentiaali- ja integraalilaskennan sovelluksiin. [22]

Mukautuvan päättelyn osa-alueella opiskelija kykenee loogiseen ajatteluun ja osaa perustella ratkaisuprosessinsa täsmällisesti. Todistaminen liittyy olennaisena osana tähän mallin osa-alueeseen. Tyypilliset tehtävät ovatkin yksinkertaisia todistamis- ja osoitustehtäviä tai konstruointitehtäviä, joissa päättely perustuu säännönmukaisuuteen. Opiskelijan on yhdisteltävä matemaattista ymmärrystä eri aiheista ja perusteltava valintojaan. [21] [22]

Opiskelijan yritteliäisyys kannattelee kaikkia muita edellä esitettyjä osa-alueita. Opiskelijan kokiessa matematiikka mielenkiintoiseksi ja hyödylliseksi, motivaatio kasvaa sekä ajattelun ja oppimisen taidot kehittyvät. Opiskelija pystyy kehittämään laskutaitoa, ongelmanratkaisukykyä ja soveltavien tehtävien hahmottamista, kun hän näkee matematiikan eteen vaivaa ja uskoo omiin kykyihinsä.

3.2.1 Matemaattinen ajattelu ja tekniikka

Tekniikan tullessa osaksi matematiikan opetusta, matemaattisen ajattelun vähenemisestä on puhuttu paljon. Erityisesti nyt, kun syksyllä 2016 aloittaneet lukiolaiset opiskelevat tekniikan keskiössä.

Kutzler [23] on tutkinut matemaattista ajattelua laskinten käytön yhteydessä. Hänen artikkelissaan puhutaan siis vain laskimista, mutta samat ajatteluprosessit pätevät mihin vain matematiikassa käytettävänä oleviin teknisiin ohjelmistoihin. Kutzler näkee tekniset apuvälineet oppimista ja ajattelua helpottaviksi työkaluiksi. Hän vertaa matemaattisen ajattelun tasoja arkipäivän ilmiöihin. Mentaalisella laskemisella tarkoitetaan niitä algebrallisia toimintoja, joita tehtävän ratkaisuprosessin aikana tapahtuu. Tämä on verrattavissa fyysisesti kävelyyn, joka kuluttaa lihaksia ja energiaa aivoissa tapahtuvan työn sijaan. Useiden tekniikan kritisoijien mielestä kynällä ja paperilla laskiessa ymmärrystä ja asian sisäistämistä tapahtuu. Tämä on verrattavissa polkupyörällä ajamiseen. Polkupyörällä ajaessa päästään nopeammin päämäärään. Samoin kynä ja paperi toimivat ajattelun apuvälineenä, jolloin aivotyöskentelyä hyödynnetään tehokkaammin. Automatisoitunutta autolla ajamista voidaan verrata mekaaniseen laskimella tai laskinohjelmistolla laskemiseen. Laskimella laskemiseen ei tarvita mentaalista tai kynä-paperi-ajattelua, mutta sen sijaan monta uutta taitoa. Laskin antaa vastauksen, mutta tehtävän ratkaisijan on tiedettävä, kuinka operoida sitä. Arkielämässä on järkevää kävellä lyhyet matkat ja kulkea pidemmät matkat autolla. Sama pätee myös tekniikan käyttöön matematiikassa. Päässälaskuna tai vihkotyöskentelyllä on järkevää suorittaa yksinkertaiset laskutoimitukset ja käyttää laskinta monimutkaisimpien tehtävien ratkaisemiseen. Jos henkilöllä on fyysisiä esteitä suoriutua kävellen pienestäkään matkasta, kuten hänen jalkansa on murtunut, on olemassa apukeinoja, joiden avulla henkilö pystyy saavuttamaan päämäärän. Samalla tavoin on olemassa henkilöitä, joiden matemaattiset taidot ovat puutteelliset jollain ajattelun tasolla. Laskin toimii oivana apuvälineenä poistamaan näitä puutteita. Laskimen avulla on mahdollista etsiä helposti matemaattisia syy-seuraussuhteita yksinkertaisten esimerkkien avulla.

Luku 4

Matematiikan tehtävien valinta

Lukion opetussuunnitelman perusteet määrittelevät millaisia oppikirjojen sisältöjä lukiolaisille valitaan. Oppikirjojen, kurssikokeiden ja ylioppilaskokeiden tehtävien valinta ei kuitenkaan ole yksinkertaista. Opetuksessa sekä kokeissa olevien tehtävien tulee olla sellaisia, että ne harjoittavat ja testaavat opiskelijoilta keskeisiä matemaattisia aihealueita sekä monipuolista matemaattista ajattelua. Oppikirjan tehtäviä tehdessään opiskelija tunnistaa tiettyjä aikaisemmin opittuja toimintoja ja matemaattisia taitoja sekä pystyy yhdistämään ja soveltamaan uutta asiaa aiemmin oppimaansa. Aikaisemmin opitun tiedon taso syvenee samalla. Kurssikokeissa ja ylioppilaskirjoituksissa opiskelijan on kyettävä soveltamaan oppimiaan tietoja ja taitoja kriittisen arvioinnin tai luovan toiminnan tasolle. [16, s. 220]

4.1 Matematiikan tehtävien ratkaisumalli

Yrjönsuuri [24, s. 118–119] on listannut matematiikan tehtävien ratkaisuun mallin, joka kehittää matemaattista ajattelua. Malli on rakennettu Yrjönsuuren tutkimuksen ja kokemusten perusteella. Yrjönsuuren mukaan Suomen kouluissa vallalla oleva oppimiskäsitys on johtanut siihen, että algoritmien käyttäminen on matemaattisen ajattelun kehittymistä tärkeämpää. Matemaattista ajattelua kehittävän tehtävän ratkaisemisen malli sisältää viisi vaihetta:

1. Matemaattisen tehtävän tavoite
2. Verbaalisesta kielestä siirtyminen symboliseen
3. Matemaattisten käsitteiden, lauseiden ja operaattoreiden ominaisuuksien pohtiminen
4. Matemaattisen operaattorin käyttäminen
5. Ongelman rajojen arviointi ja ratkaisun esittäminen

Matemaattisen tehtävän tavoitteella tarkoitetaan tehtävänannon ja ratkaisun välillä tapahtuvaa sisällöllistä muutosta. Tähän kuuluvat siis ongelman havaitseminen, hahmottaminen, mahdollisen apukuvan esittäminen ja mielikuva ratkaisusta. Opiskelijan on ajattelun tasolla pohdittava aikaisempia tilanteita ja tehtäviä, joiden matemaattinen rakenne on tehtävänannon kaltainen. [24, s. 119]

Siirtyminen verbaalisesta kielestä symboliseen tarkoittaa, että reaalimaailman kieli ja tehtävänannon arkipäiväinen tapahtuma muutetaan matematiikan kielelle. Matematiikan symbolinen kieli koostuu lauseista, kaavoista ja merkkikielestä, jolla täsmällisesti kuvataan ratkaisuprosessia. Tässä vaiheessa opiskelijan on tärkeää pohtia, mitkä muuttujat tunnetaan, miten niitä matemaattisesti merkitään ja mitkä muuttujista täytyy struktuoida uudelleen. [24, s. 119]

Matemaattisten käsitteiden, lauseiden ja operaattoreiden ominaisuuksien pohtiminen linkittää ratkaisuprosessin yhdeksi kokonaisuudeksi. Tärkeää on, että opiskelija on ymmärtänyt matemaattisten käsitteiden merkityksen. [24, s. 119]

Matemaattisen operaattorin tai menetelmän käyttäminen on se toiminto ja rutiini, jolla tehtävä lasketaan. Toimintona voi olla päässälasku, laskimen tai muiden sähköisten apuvälineiden käyttö. Opiskelijat sortuvat usein "hyppäämään" suoraan tähän laskemisen vaiheeseen ilman huolellista suunnittelua. Tämä on suotavaa silloin, kun algoritmista ajattelua käytetään vain tietyn tyyppisten tehtävien harjoitteluun. Ongelmia ilmenee, kun opiskelijan on kyettävä soveltamaan ja yhdistämään laajempia matematiikan osa-alueita. [24, s. 119]

Ongelman rajojen arvioiminen tarkoittaa tehtävän kokonaisuuden kriittistä arviointia ja kaikkien mahdollisuuksien huomioon ottamista. Opiskelijan on pohdittava onko ratkaisuprosessi täsmällisesti esitetty ja onko vastaus tehtävänannon mukainen. [24, s. 119]

4.2 Ylioppilaskokeissa esiintyneet matematiikan aihealueet vuosina 2012-2016

Olen tätä tutkielmaa varten käynyt läpi viimeisen neljän vuoden ajalta pitkän matematiikan ylioppilaskokeita ja jaotellut kokeiden tehtävät kursseittain. Suurin osa tehtävistä sisältää tietojen yhdistämistä useammalta kurssilta matematiikan kumulatiivisuudesta johtuen, mutta olen jaotellut nämä tehtävät sen kurssin sisältöön, jota tehtävä eniten testaa (LIITE 1). Liitteen kolmessa kuvassa on esitetty tulkintaa helpottamaan jokainen ylioppilaskokeen vuosi erilaisella värillä. Jokaisen tehtävän kohdalla on kerrottu, minkä vuoden ylioppilaskokeesta on kysymys sekä lyhyt koonti siitä mistä tehtävässä on kyse. Sarakkeen alimmaisella rivillä on jokaiseen kurssiin liittyvien tehtävien osuus kaikista tutkituista ylioppilaskokeista.

Aloitin tutkimalla viimeisen kymmenen vuoden ajalta ylioppilaskokeita, mutta päädyin kuitenkin vain viimeisen neljän vuoden kokeisiin, koska keväällä 2012 sallittiin ylioppilaskokeissa symboliset laskimet. Kevään 2016 ylioppilaskoe poikkeaa kaksiosaisuudellaan aiemmista kokeista ja antaa suuntaviivoja sähköisten ylioppilaskokeiden tehtävätyypeille.

Kaikissa tutkimusjakson ylioppilaskokeissa ratkaistiin yhteensä 10 tehtävää. Neljän vuoden aikana ylioppilaskokeissa tehtäviä oli kaiken kaikkiaan 15 aina kevääseen 2016 asti. Näissä kokeissa kaksi viimeistä tehtävää olivat jokeritehtäviä, jotka yhdistivät useampien kurssien asioita ja olivat huomattavasti muita tehtäviä soveltavampia. Kevään 2016 kokeessa neljä ensimmäistä tehtävää ratkaistiin ilman teknisiä apuvälineitä. Toisessa osassa koetta laskin oli sallittu ja kaikkiaan 10 tehtävästä ratkaistiin kuusi.

Tekemästäni jaottelusta (LIITE 1) nähdään, että pitkän matematiikan ensimmäisten kurssien asioita testataan muiden tehtävien ohessa, oikeastaan jokaisessa tehtävässä. Varsinaisesti MAA1- ja MAA2 -kursseihin liittyviä asioita on testattu 14 % kaikista tehtävistä. Yleensä nämä tehtävät ovat olleet kokeen ensimmäisiä tehtäviä ja olleet rutiininomaisia yhtälön sievennystehtäviä. Geometrian tehtävät ovat olleet tasaisesti edustettuina kaikissa neljän vuoden ylioppilaskokeissa. Kaikista tehtävistä yhteensä 16 % oli MAA3-kurssin aihepiiriin liittyviä. Symbolisten laskinten sallimisen jälkeen geometrian tehtävät ovat olleet soveltavampia ja useimmiten liittyneet avaruuskappaleiden ominaisuuksiin. Analyyttisen geometrian (MAA4)-, vektori (MAA5)- ja todennäköisyyslaskennan (MAA6) kurssiin liittyviä tehtäviä oli kaikkia 9% kaikista kokeen tehtävistä. MAA4 -kurssin tehtävät käsittelivät ympyröiden ominaisuuksia sekä tason ja suoran leikkauspisteitä. Monessa koetehtävässä kysyttiin myös pisteen etäisyyttä suorasta. MAA5-kurssilla kysyttiin vektorien ominaisuuksiin liittyviä asioita, kuten vektorien pituutta, leikkauspistettä ja pistetuloa. MAA6 -kurssin asioista testattiin todennäköisyyslaskennan ymmärtämistä ja tehtävissä toistui odotusarvon laskeminen. Derivaatta-kurssin (MAA7) aihepiirejä testattiin 7 % kaikista tehtävistä. Pienestä prosentista huolimatta differentiaali- ja integraalilaskenta oli edustettuna noin 48 % tehtävistä. Suurin osa Juuri- ja logaritmifunktio (MAA8)-kurssin sekä trigonometriset funktiot (MAA9)-kurssin tehtävistä käsittelivät myös MAA7-kurssilla opittuja asioita. Useimmiten tehtävissä oli derivaatan sovellus, josta määritettiin suurin ja pienin arvo. Integraalilaskennan kurssin (MAA10) tehtävät testasivat joko integraalien ominaisuuksien ymmärtämistä tai niiden soveltamista esimerkiksi pinta-alan tai pyörähdyskappaleen tilavuuden laskemisessa. Uudesta opetussuunnitelmasta poistuvasta Logiikka ja lukuteoria -kurssin (MAA11) aihepiireistä kysyttiin vain 5 % kaikista tehtävistä. Valtakunnallinen syventävä kurssi Numeeriset menetelmät (MAA12) oli edustettuna 7 % tehtävistä. Useissa tämän kurssin tehtävissä testattiin Newtonin menetelmän ymmärtämistä. Viimeinen valtakunnallinen syventävä kurssi Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi (MAA13) oli edustettuna 9% ylioppilaskokeen tehtävistä ja tehtävät käsittelivät suppenevaa jonoa, raja-arvon ymmärtämistä sekä paloittain määriteltyä funktiota.

4.3 Tehtävien esittely

Tähän tutkielmaan valitut tehtävät ovat vanhemman lukion opetussuunnitelman (LOPS2003) aikakaudelta, joten tehtävissä ei ole painotettu sähköisten apuvälineiden käyttöä ja useimmat tehtävät on tarkoitettu laskettavaksi vihkoon. Tehtävät on valittu sen perusteella, että ne testaavat eniten tietoja ja taitoja, joita on kysytty myös viimeisen neljän vuoden aikana pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa. Kaikki tehtävät on valittu Pitkä matematiikka -kirjasarjasta. Olen numeroinut tehtävät ja viittaan niihin myöhemmin tehtävien analysoinnin yhteydessä. Olen jaotellut tehtävät edellä esitetyn Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin mallin mukaan neljään eri osa-alueeseen.

4.3.1 Pisteen etäisyys suorasta ja käsitteellinen ymmärtäminen

Pisteen etäisyys suorasta on Analyyttinen geometria -kurssin viimeisimpiä opeteltavia asioita. Aihealue nivoaa yhteen niin aikaisempien kurssien asioita, erityisesti Geometria-kurssin (MAA3), kuin myös samalla kurssilla aiemmin opittuja asioita. Valittu tehtävä on seuraavanlainen [3, s. 130 teht. 296]:

Tehtävä 1. Mitkä ovat suorien $x + 7y = 0$ ja $x - y = 0$ muodostamien kulmien puolittajien yhtälöt?

4.3.2 Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava ja proseduraalinen sujuvuus

Toisen asteen yhtälön $ax^2+bx+c = 0$ ratkaisukaava on yksi keskeisimpiä Polynomifunktiot-kurssilla opittavia asioita. Ratkaisukaava on suoraan olemassa MAOL:ssa ja symboliset laskimet kykenevät laskemaan huomattavasti monimutkaisempien yhtälöiden ratkaisuja. Nyt kuitenkin ylioppilaskokeen muuttuessa kokeen päässälaskuosiossa testataan varmasti kokelaan ymmärrystä toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta. Valittu tehtävä on kirjasta Pitkä matematiikka Polynomifunktiot. [2, s. 75 teht. 222]

Tehtävä 2. Ratkaise.

a)

$$1 + \frac{12}{x^2} = \frac{8}{x}$$

b)

$$\frac{x^2}{x-1} = \frac{9}{2}$$

4.3.3 Juurifunktion suurin ja pienin arvo ja strateginen kompetenssi

Juurifunktioiden sovellustehtävät ovat Juuri- ja logaritmifunktio -kurssin kertaava aihepiiri ennen siirtymistä logaritmifunktion käsittelyyn. Sanallisten tehtävien osuus on suhteellisen pieni kurssin aikana, mutta sähköiset ylioppilaskokeet mahdollistavat pedagogisesti järkevien sanallisten tehtävien ratkaisemisen. Symboliset laskimet eivät kykene muodostamaan ratkaisuun vaadittavaa yhtälöä, vaan opiskelijan on itse yhdisteltävä erilaisia ratkaisuprosesseja tehtävän ratkaisuun pääsemiseksi. Tehtävä on valittu Juurifunktioiden sovelluksia -kappaleesta ja kokoaa yhteen aikaisempien kurssien asioita laajasti [4, s. 58 teht. 98]. Tehtävänanto on seuraavanlainen:

Tehtävä 3. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin muotoisen teltan kattoa tukee neljä telttakeppiä, joiden jokaisen pituus on $3,00$ metriä. Määritä pohjaneliön sivun pituus niin, että teltan tilavuus on mahdollisimman suuri.

Samankaltainen tehtävä oli kevään 2015 pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa [25].

4.3.4 Epäoleellinen integraali ja mukautuva päättely

Integraalilaskennan kurssin aiheita syvennetään valtakunnallisella syventävällä Differentiaali- ja integraalilaskennan kurssilla. Epäoleellinen integraali laajentaa opiskelijan käsitystä integraalin ominaisuuksista. Tehtävä on valittu siksi, että se käsittelee monipuolisesti aiemmin opittuja asioita. Tehtävä on seuraavanlainen [5, s. 118 teht. 209]:

Tehtävä 4. Osoita, että funktio

$$f : f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} \, dx$$

on määritelty kaikkialla muuttujan t reaaliarvoilla. Määritä funktion f lauseke integroidussa muodossa.

Luku 5

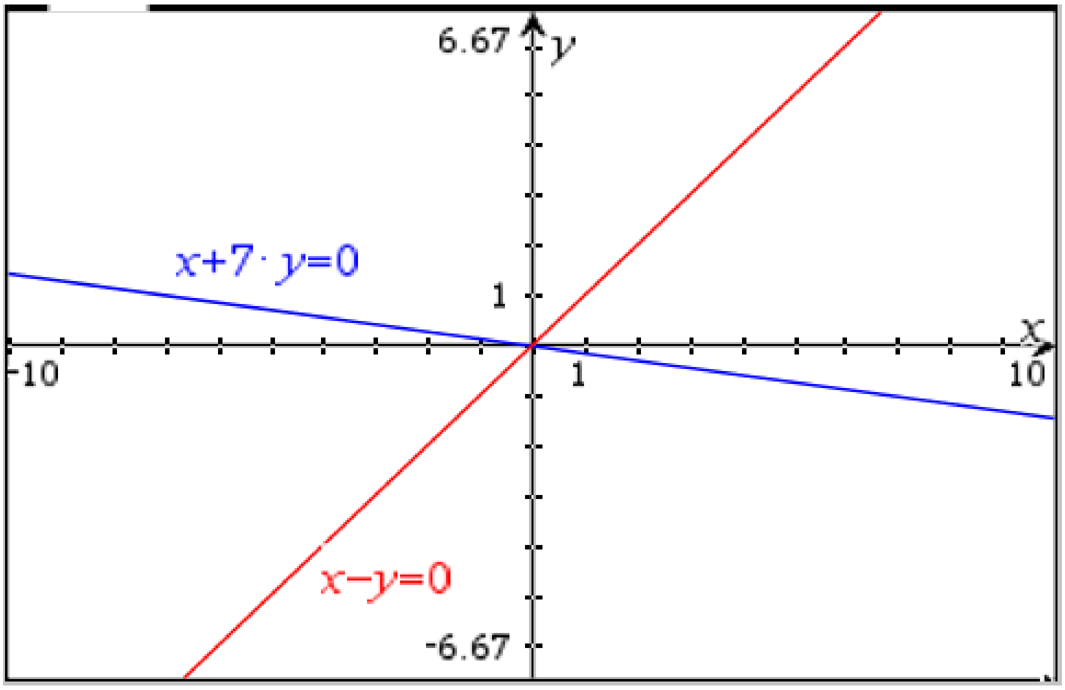
Tehtävien analysointi

Jokaisen tehtävän kohdalla on esitetty täsmällinen ratkaisumalli. Ratkaisuiden esittämistapa on samalainen kuin lukiossa opetetaan. Ratkaisuprosessin välivaiheet on numeroitu viittaamista helpottamaan. Tämän jälkeen pohdin tehtävien matemaattista sisältöä ajattelun kannalta. Pohdintaosuuden jälkeen on jokaisesta tehtävästä erikseen matemaattinen teoriaosuus, jossa todistetaan ratkaisuissa käytetyt kaavat. Tämä matemaattinen osuus ylittää lukion opetettavien aiheiden sisällöt. Tehtävien ratkaisuissa olen hyödyntänyt teknisiä apuvälineitä, kuten Geogebraa ja symbolista laskinta, jotka kokelailla on käytössä ylioppilaskirjoituksissa.

5.1 Käsitteellinen ymmärtäminen

Tehtävässä 1. kulman puolittajien yhtälöiden määrittäminen liittyy olennaisesti pisteen etäisyyden laskemiseen suorasta. Tehtävä sisältää monia matemaattisia käsitteitä, joiden sisäistämistä opiskelijoilta testataan. Tehtävän täsmällinen ratkaisumalli on esitetty alla ja sen jälkeen todistettu tehtävään liittyvät käsitteet.

Piste (x, y) on suorien $x + 7y = 0$ ja $x - y = 0$ muodostaman kulman puolittajalla, jos ja vain jos se on yhtä etäällä molemmista suorista. Tehtävässä hyödynnetään pisteen etäisyys suorasta -kaavaa, joka todistetaan myöhemmin. Kaavassa osoittajassa on suoran normaalimuotoisen yhtälön vasemman puolen itseisarvo ja nimittäjässä suoran yhtälön kertoimien A ja B neliöiden summan neliöjuuri. [3, s. 122–126] Piirretään aluksi mallikuva (Kuva 5.1). Mallikuva on piirretty Ti-Nspire Cx CAS-laskinohjelmistolla.



Kuva 5.1: Mallikuva tehtävästä 1.

Muodostetaan siis etäisyyksien lausekkeet, merkitään ne yhtä suuriksi ja sievennetään yhtälö.

$$\frac{|x+7y|}{\sqrt{1^2+7^2}} = \frac{|x-y|}{\sqrt{1^2+1^2}} \tag{5.1}$$

$$\frac{|x+7y|}{\sqrt{50}} = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} \qquad \| \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{2} \tag{5.2}$$

$$\sqrt{2}|x+7y| = \sqrt{50}|x-y| \tag{5.3}$$

$$\sqrt{2}|x+7y| = 5\sqrt{2}|x-y| \qquad \| : \sqrt{2} \tag{5.4}$$

$$|x+7y| = 5|x-y| \tag{5.5}$$

$$|x+7y| = |5x-5y| \tag{5.6}$$

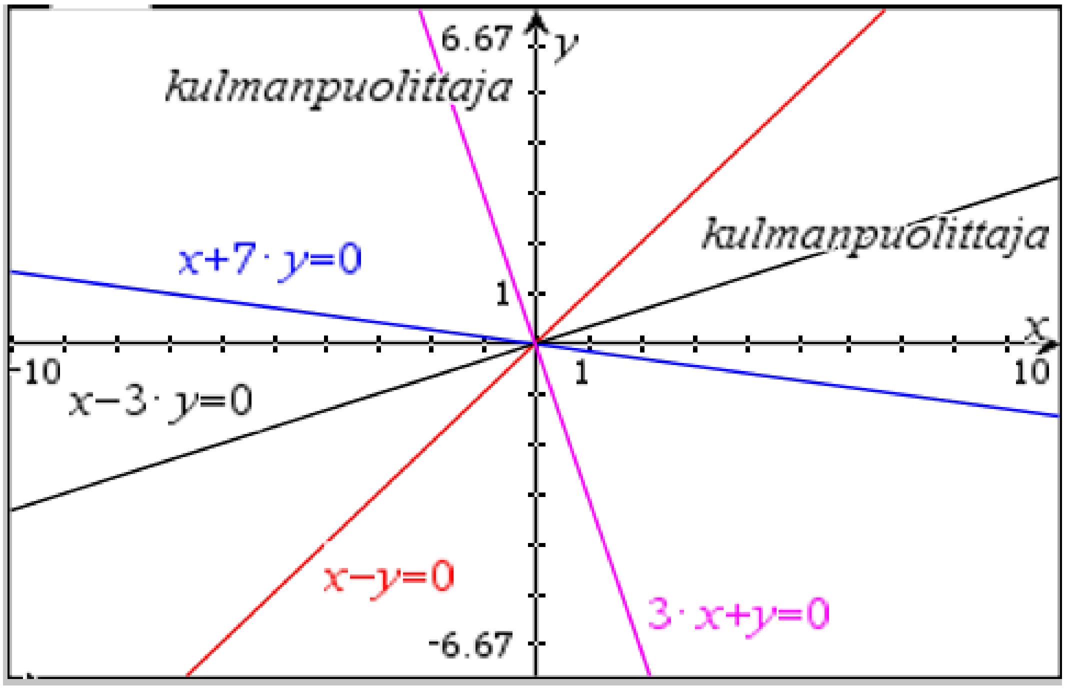
$$\text{itseisarvon määritelmä} \tag{5.7}$$

$$x+7y = 5x-5y \quad \text{tai} \quad x+7y = -(5x-5y) \tag{5.8}$$

$$4x-12y = 0 \quad \text{tai} \quad 6x+2y = 0 \tag{5.9}$$

$$x-3y = 0 \quad \text{tai} \quad 3x+y = 0 \tag{5.10}$$

Tehtävän ratkaisun voi vielä helposti tarkistaa laskinohjelmiston avulla (Kuva 5.2).



Kuva 5.2: Mallikuva tehtävän 1. ratkaisusta.

5.1.1 Tehtävän ajatteluprosessi

Tehtävä vaatii matematiikalle tyypillistä abstraktia ajattelua ja matemaattisten objektien, tässä tapauksessa suoran ja kulman puolittajan, ominaisuuksien hallintaa. Laskin toimii tehtävän havainnollistajana. Jos opiskelijalle ei ole selvää tehtävässä käytetyt käsitteet, ei tehtävää pääse ratkaisemaan alkua pidemmälle. Tehtävässä ei nimittäin missään vaiheessa sanota mitään pisteen etäisyydestä suorasta, jolloin opiskelija ei pysty turvautumaan suoraan kaavakokoelmaankaan. Tehtävän lähtökohta on kulman puolittajan geometriset ominaisuudet: Piste on kulman puolittajalla, jos ja vain jos se on yhtä etäällä kulman kyljistä. Kun opiskelija on selvittänyt itselleen aiemmin opitun kulman puolittajan käsitteen ja siihen liittyvät ominaisuudet, on mahdollista edetä tehtävän seuraavaan vaiheeseen sijoittamalla suorien normaalimuotoiset yhtälöt pisteen etäisyys suorasta -kaavaan ja merkitsemällä yhtälöt yhtä suuriksi (5.1). Ratkaisuprosessin vaiheissa (5.2)-(5.6) hyödynnetään yhtälön ratkaisun proseduureja.

5.1.2 Tehtävään 1. liittyvä matemaattinen teoria

Tässä kappaleessa kerrotaan itseisarvon täsmällinen määritelmä ja todistetaan pisteen etäisyys suorasta -kaava. Uudessa opetussuunnitelmassa (LOPS 2015) pitkän matematiikan vektorikurssi tulee ennen analyyttisen geometrian kurssia. Näin ollen analyyttisen geometrian käsitteitä on mahdollista todistaa vektoreiden avulla [6]. Tässä tutkielmassa pisteen etäisyys suorasta todistetaan vektoreiden avulla.

Itseisarvo

Määritelmä 5.1 Reaaliluvun x *itseisarvo* [26, s. 8]

$$|x| = \begin{cases} x, & kun\ x \geq 0 \\ -x, & kun\ x < 0 \end{cases} \tag{5.11}$$

Pisteen etäisyys suorasta

Tässä todistuksessa on hyödynnetty Elementary Linear Algebra -teoksen [27, s. 286–287] todistusta sekä Pentti Haukkasen Tampereen Yliopiston Lineaarialgebra-kurssin luennoilla käytetyn kurssimonisteen todistusta [28, s. 50–51].

Ennen kuin voimme todistaa Pisteen etäisyyden suorasta, on meidän osoitettava todistuksessa käytettävä lause tunnetuksi.

Lause 5.1 [28, s. 49] Olkoon l suora

$l: \quad ax + by + c = 0$, missä $a, b \neq 0$.

Silloin $(a, b) \perp l$. Toisin sanoen (a, b) on suoran l normaalivektori.

Todistus. Todistus sivuutetaan. Täsmällinen todistus löytyy Pentti Haukkasen luentomuistiinpanoista [28, s. 49]. □

Lause 5.2 [28, s. 50] Pisteen $P = (x_0, y_0)$ etäisyys suorasta $l : ax + by + c = 0$ on

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Todistus. Olkoon $Q = (x_1, y_1)$ jokin suoran l piste. Lauseen 5.1 nojalla vektori $\mathbf{n} = (a, b)$ on suoran l normaalivektori. Tällöin

$$\begin{aligned} D &= \|proj_{\mathbf{n}}\overrightarrow{QP}\| && (5.12)\\ &= \|\frac{\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}\| && (5.13)\\ &= \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} && (5.14)\\ &= \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} && (5.15)\\ &= \frac{|ax_0 - ax_1 + by_0 - by_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} && (5.16) \end{aligned}$$

Oletuksen mukaan piste $Q(x_1, y_1)$ on suoralla, joten se toteuttaa yhtälön $ax_1 + by_1 + c = 0$. Näin ollen $-ax_1 - by_1 = c$. Sijoitetaan tämä yllä saatuun yhtälöön (5.16), jolloin saamme pisteen etäisyyden suorasta -kaavan.

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (5.17)$$

□

5.2 Proseduraalinen sujuvuus

Opiskelijan proseduraalista sujuvuutta mittaava yhtälön ratkaisutehtävä (tehtävä 2.) on kokonaan symbolikieltä. Opiskelijan on tiedettävä matemaattisen symbolikielen merkitys ja ymmärrettävä mitä tehtävässä pitää ratkaista. Yhtälön ratkaisua on harjoiteltu läpi koulumatematiikan, aloittaen alakoulussa konkreettisten esineiden avulla ja jatkaen yläkoulussa yksinkertaista yhtälönratkaisua abstraktien kirjainten avulla. Lukion yhtälön ratkaisu on jatkumo aiemmin opitulle, jossa nyt opiskelijan on hallittava yhtälönratkaisun proseduurit. Pelkkä päättely ei enää riitä, koska yhtälöt ovat sen verran monimutkaisia.

Tehtävän 2. ratkaisumalli on seuraavanlainen:

a)

$$1+\frac{12}{x^2}=\frac{8}{x} \qquad \| \cdot x^2 \neq 0 \tag{5.18}$$

$$x^2+12=\frac{8x^2}{x} \tag{5.19}$$

$$x^2+12=8x \qquad \| -8x \tag{5.20}$$

$$x^2-8x+12=0 \tag{5.21}$$

$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 1\cdot 12}}{2} \tag{5.22}$$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2} \tag{5.23}$$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{16}}{2} \tag{5.24}$$

$$x=\frac{8\pm 4}{2} \tag{5.25}$$

$$x=\frac{12}{2} \quad \text{tai} \quad x=\frac{4}{2} \tag{5.26}$$

$$x=6 \quad \text{tai} \quad x=2 \tag{5.27}$$

b)

$$\frac{x^2}{x-1}=\frac{9}{2} \qquad \|\text{kerrotaan ristiin} \tag{5.28}$$

$$2x^2=9x-9 \qquad \| -9x+9 \tag{5.29}$$

$$2x^2-9x+9=0 \tag{5.30}$$

$$x=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot 2\cdot 9}}{2\cdot 2} \tag{5.31}$$

$$x=\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{4} \tag{5.32}$$

$$x=\frac{9\pm\sqrt{9}}{4} \tag{5.33}$$

$$x=\frac{9\pm 3}{4} \tag{5.34}$$

$$x=\frac{12}{4} \quad \text{tai} \quad x=\frac{6}{4} \tag{5.35}$$

$$x=3 \quad \text{tai} \quad x=\frac{3}{2} \tag{5.36}$$

5.2.1 Tehtävä 2. a-kohta

Tehtävän a)-kohdassa ratkaisuprosessin ensimmäisessä vaiheessa (5.18) on ymmärrettävä murtolausekkeiden ominaisuuksia. Tehtävässä muuttuja on nimittäjässä ja nollalla ei voi jakaa. Lausekkeen arvoa ei siis ole määritelty, kun $x = 0$. Määrittelyehdon on tultava ilmi ratkaisusta. Ratkaisun ensimmäisessä vaiheessa on oltava muistissa toimintatapa murtolausekkeiden sieventämiseen. Yläkoulussa ja kurssin aiemmissa aihealueissa on käsitelty sellaisten murtolausekkeiden sieventämistä, jossa nimittäjässä on kokonaisluku [2, s. 39]. Nyt toimintatapa on samanlainen, mutta nimittäjässä on muuttuja ja on huomioitava määrittelyehto. Yhtälön molemmat puolet kerrotaan nimittäjällä. Ensimmäinen tehtävän kompastuskivi on, jos yhtälön molempia puolia ei kerrota tai kerrotaan vain osa termeistä. Seuraavassa vaiheessa (5.19) voidaan samanmuotoiset termit supistaa, koska osoittajassa on kertolasku. Tämä sievennys kannattaa tehdä, sillä pääsemme eroon nimittäjästä ja yhtälöä on yksinkertaisempi operoida. Vaiheessa (5.20) opiskelijan on huomattava, että kyseessä on toisen asteen yhtälö, jonka pystyy ratkaisemaan joko neliöksi täydentämällä tai toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. Tässä ratkaisumallissa käytämme toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa. Nyt siis yhtälöä on muokattava niin, että yhtälön termit voidaan sijoittaa toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan. Opiskelijan on muokattava yhtälöä niin, että yhtälö on normaalimuodossa $ax^2 + bx + c = 0$. Yhtälön molemmilta puolilta siis vähennetään termi $8x$. Jotta opiskelija kykenee valitsemaan oikean vähennettävän termin, on ymmärrettävä vastaluvun käsite sekä osattava laskutoimituksen ja lausekkeen etumerkin merkitys.

Vaihe (5.20) sisältää useita mahdollisuuksia virheisiin. Opiskelija voi virheellisesti vähentää vain toiselta puolelta yhtälöä vähennettävän termin $8x$. Opiskelijalla voi olla myös puutteita tämän kaltaisen toisen asteen yhtälön ratkaisemisessa, jolloin hän voi lähteä muokkaamaan yhtälöä vähentämällä luvulla 12 ja ottamalla sen jälkeen yhtälön molemmilta puolilta neliöjuuren. Tällöin opiskelija osaa pintapuolisella ajattelun tasolla käyttää neliöjuurta ratkaisuprosesseissaan, mutta hän ei ole sisäistänyt mitä neliöjuuri tarkoittaa.

Ratkaisuprosessin vaiheessa (5.22) on hyödynnettävä aiemmin opittuja proseduureja tämäntyyppisten yhtälöiden ratkaisulle. Jos opiskelija pääsee ajatteluprosessissaan tähän vaiheeseen asti, on prosessi tästä eteenpäin mekaanista rutiinia, joka voi sisältää korkeintaan huolimattomuusvirheitä. Opiskelijan on tässä vaiheessa sijoitettava yhtälön termien kertoimet oikein ratkaisukaavaan. Syvällisessä oppimisessa opiskelija ymmärtää miksi termit sijoitetaan, kuten ne sijoitetaan. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan perustelu on esitetty luvussa 5.2.3.

Opiskelijan on ymmärrettävä itseisarvon käsite neliöjuuritehtäviä ratkaistaessa. Jos opiskelijalta puuttuu käsitteellinen ymmärrys neliöjuuresta ja itseisarvosta, on ratkaisussa usein vain toinen vastauksista.

5.2.2 Tehtävä 2. b-kohta

Tehtävän b)-kohta noudattaa a)-kohdan ratkaisuanalyysiä. Ratkaisun ensimmäisessä vaiheessa (5.28) opiskelijan on kuitenkin huomattava kertoa yhtälö ristiin tai laventaa yhtälö samannimiseksi. Käsitteellisen ymmärryksen on oltava opiskelijalla siis hallussa. Tässä ratkaisussa on käytetty ristiin kertomista ja sen matemaattinen perustelu on esitetty luvussa 5.2.3. Muutoin ratkaisuprosessi (5.29-5.36) on tehtäväanalyysiltään a)-kohdan kaltainen.

5.2.3 Tehtävään 2. liittyvä matemaattinen teoria

Tässä kappaleessa esitetään matemaattinen määritelmä neliöjuurelle ja perustelut toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalle sekä ristiin kertomiselle.

Neliöjuuri

Määritelmä 5.2 [29, s. 92] Reaaliluvun a *neliöjuuri* on ei-negatiivinen luku, jonka neliö on a. Siis

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad ja \quad \sqrt{a} \geq 0$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan johtaminen

Kaikki toisen asteen yhtälöt on mahdollista ratkaista neliöksi täydentämällä. Tällöin tavoitteena on saattaa yhtälö muotoon, jossa binomin neliö on yhtälön vasemmalla puolella ja oikealla puolella on jokin luku. [2, s. 69] Ratkaistaan yhtälö $ax^2+bx+c = 0$ eli toisen asteen yhtälön normaalimuoto neliöksi täydentämällä.

Kerrotaan yhtälö ensin luvulla $4a$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \qquad || \cdot 4a \neq 0 \\ 4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 \end{aligned}$$

Edellä esitetty kertominen luvulla $4a$ tehdään, jotta myöhemmässä ratkaisun vaiheessa vältymme hankalilta välivaiheilta. Tämän kertomisen olisi voinut tehdä myös aivan ennen ratkaisun loppua. Jotta yhtälön vasemmalle puolelle saataisiin binomin neliö ja vasemmalle puolelle yhtälöä pelkkä luku, on vakiotermi siirrettävä oikealle puolelle yhtälöä lisäämällä yhtälön molemmille puolille $-4ac$.

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Vasen puoli täydennetään nyt neliöksi. Toisen asteen termi $4a^2x^2$ on monomin $2ax$ neliö.

$$(2ax)^2 + 4abx = -4ac$$

Yhtälön vasemmalla puolella on monomin $2ax$ neliö lisättynä monomien $2ax$ ja b kaksinkertaisella tulolla. Lisätään siis yhtälön molemmille puolille b^2 niin saamme yhtälön binomin neliöksi.

$$\begin{aligned} (2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b &= -4ac \qquad || + b^2 \\ (2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 &= b^2 - 4ac \\ (2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac \end{aligned}$$

Neliöksi täydentäminen on nyt suoritettu. Yhtälö toteutuu, kun $2ax + b$ on yhtälön oikean puolen neliöjuuri tai neliöjuuren vastaluku.

$$\begin{aligned}
2ax + b &= \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{tai} \quad 2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac} \\
2ax &= -b + \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{tai} \quad 2ax = -b - \sqrt{b^2 - 4ac} \\
x &= \frac{-b + \sqrt{(b)^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-b - \sqrt{(b)^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Näin olemme saaneet yhtälön muotoon, joka esiintyy toisen asteen yhtälön ratkaisukaavassa. [2, s. 69–70]

Ristiin kertominen

Ristiin kertominen on yksinkertaisempi ja lyhennetty tapa merkitä verrannon muotoisen yhtälön kertominen nimittäjien tulolla [29, s. 27]:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{c}{d} \qquad || \cdot bd \neq 0 \\
\frac{abd}{b} &= \frac{cbd}{d}
\end{aligned}$$

Yhtälön toiselta puolelta supistuu muuttuja b ja toiselta muuttuja d pois, joten päädytään samaan muotoon kuin ristiin kertomalla.

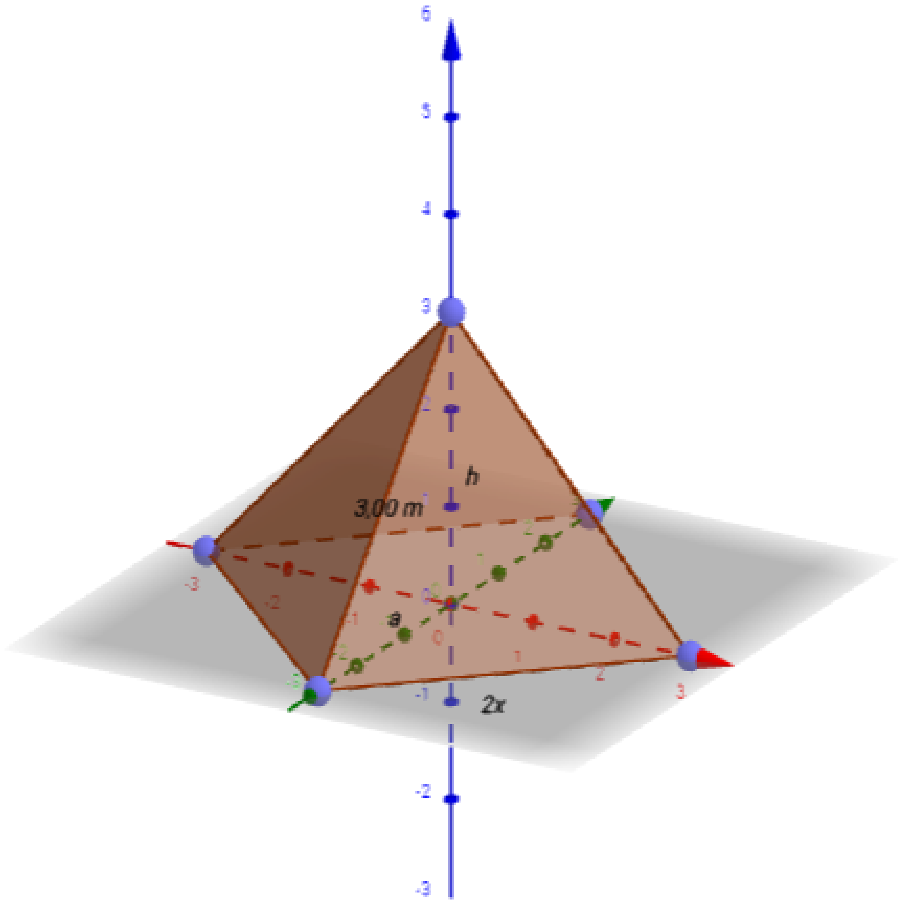
$$ad = bc$$

5.3 Strateginen kompetenssi

Tehtävässä 3. yhdistetään Geometria-kurssin (MAA3) avaruusgeometrista hahmottamista sekä derivaatan soveltamista. Opiskelijalta vaaditaan tehtävän ratkaisuun pääsemiseksi aiemman tiedon yhdistämistä ja soveltamista sopivia käsitteitä ja proseduureja käyttämällä.

5.3.1 Tehtävän 3. ratkaisumalli

Tehtävä on järkevää aloittaa piirtämällä mallikuva ja merkitsemällä siihen tehtävässä annetut tiedot sekä määrittelemällä tehtävässä käytetyt symbolit reaalimaailman kielelle. Derivaattaan sekä funktion suurimpaan ja pienimpään arvoon liittyvät ominaisuudet todistetaan luvussa 5.3.3. Piirretään aluksi tehtävää helpottava mallikuva (Kuva 5.3). Ratkaisumalli on seuraavanlainen:



Kuva 5.3: Mallikuva tehtävään 3.

Merkitään pyramidin pohjaneliön sivun puolikasta muuttujalla x. Pohjan lävistäjän puolikas $a = \frac{1}{2} \cdot 2x\sqrt{2} = x\sqrt{2}$. Pythagoraan lauseella saadaan laskettua pyramidin korkeus h

$$
\begin{aligned}
h^2 + a^2 &= 3^2 &(5.37)\\
h &= \sqrt{9 - a^2} &(5.38)\\
&= \sqrt{9 - (\sqrt{2}x)^2} &(5.39)\\
&= \sqrt{9 - 2x^2}. &(5.40)
\end{aligned}
$$

Pyramidin tilavuus saadaan laskettua seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3} \cdot (2x)^2 \cdot h &(5.41)\\
&= \frac{1}{3} \cdot 4x^2 \cdot \sqrt{9 - 2x^2} &(5.42)\\
&= \frac{4}{3}x^2\sqrt{9 - 2x^2} &(5.43)
\end{aligned}
$$

Muuttujan x määrittelyväli on tässä tapauksessa $[0, 4\frac{1}{2}]$.

Muodostetaan funktio $f(x) = x^2\sqrt{9 - 2x^2}$.
Tilavuus saa suurimman arvonsa kohdassa, jossa funktio $f(x)$ saa suurimman arvonsa välillä $[0, \sqrt{4\frac{1}{2}}]$.

Derivoidaan

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2x \cdot \sqrt{9 - 2x^2} + x^2 \cdot \left(\frac{1}{2}(9 - 2x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4x)\right) &(5.44)\\
&= 2x\sqrt{9 - 2x^2} + x^2 \cdot -\frac{4x}{2\sqrt{9 - 2x^2}} &(5.45)\\
&= 2x \cdot \sqrt{9 - 2x^2} + x^2 \cdot \frac{-2x}{\sqrt{9 - 2x^2}} &(5.46)\\
&= \frac{2x(9 - 2x^2) - 2x^3}{\sqrt{9 - 2x^2}} &(5.47)\\
&= \frac{18x - 6x^3}{\sqrt{9 - 2x^2}}. &(5.48)
\end{aligned}
$$

Derivaattafunktion nollakohdat saadaan osoittajan nollakohdista.

$$
\begin{aligned}
18x - 6x^3 &= 0 &(5.49)\\
6x(3 - x^2) &= 0 &(5.50)\\
\text{tulon nollasääntö} & &(5.51)\\
x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \sqrt{3} \quad \text{tai} \quad x &= -\sqrt{3} &(5.52)
\end{aligned}
$$

Näistä nollakohdista määrittelyvälille $]0, \sqrt{4\frac{1}{2}}[$ kuuluu $\sqrt{3}$.

Funktion f arvo derivaatan nollakohdassa ja välin päätepisteissä on
$f(0) = 0$, $f(4\frac{1}{2}) = 0$ ja

$$f(\sqrt{3}) = 9 \cdot \sqrt{3}^4 - 2 \cdot \sqrt{3}^6 \tag{5.53}$$
$$= 27. \tag{5.54}$$

Funktio f saa suurimman arvonsa, kun $x = \sqrt{3}$.
Tilavuudeltaan suurimman pyramidin pohjaneliön sivun pituus on
$2x = 2\sqrt{3} \approx 3,46$. Sivun pituus siis noin $3,46$ m.

5.3.2 Matemaattinen ajattelumalli tehtävän ratkaisuun

Tehtävänanto sisältää useita "piilotettuja" tietoja, jotka on poimittava ennen tehtävän ratkaisuun ryhtymistä. Mallikuva auttaa hahmottamaan tehtävän ratkaisua. Jo ensimmäisessä lauseessa: *"Säännöllisen nelisivuisen pyramidin - - "* on mietittävä, millainen avaruuskappale pyramidi on. Geometria-kurssilla määritellään säännöllinen pyramidi seuraavasti: *"Pyramidi on säännöllinen, jos pyramidin pohja on säännöllinen monikulmio ja jos huipusta pohjaan piirretty korkeusjana kohtaa pohjamonikulmion sen keskipisteessä"* [30, s. 152]. Tämän määritelmän jälkeen on selvää, että säännöllisen pyramidin korkeusjana kohtaa nelisivuisen pyramidin pohjan sen keskipisteessä. Nelisivuinen puolestaan viittaa siihen, että pohja on neliö. Seuraavaksi on pohdittava missä pyramidissa on neljä 3 metriä pitkää telttakeppiä. Reaalimaailmasta teltan rakenne on tuttu ja itsestään selvästi neljä telttakeppiä ovat pyramidin vaippaa reunustavat sivut. Näin pystytään annettujen tietojen avulla piirtämään mallikuva (Kuva 5.3) hahmottamista ja tehtävänratkaisua helpottamaan.

Seuraavaksi on siirryttävä reaalimaailman kielestä symboliseen kieleen. Tehtävän alussa määritellään, mitä käsitettä merkitään milläkin symbolilla. Nyt tehtävässä kysytään: *"Määritä pohjaneliön sivun pituus - -, jotta tilavuus on mahdollisimman suuri."* Nyt kannattaa merkitä tuntemattomalla x pohjaneliön sivun puolikasta. On tärkeää valita oikein, mitä merkitään muuttujalla x, sillä muuten tehtävästä voi tulla huomattavan hankala laskea. Kun merkitsimme pohjaneliön puolikasta muuttujalla x, pääsemme myöhemmässä ratkaisun vaiheessa eroon laskua hankaloittavista murtoluvuista. Opiskelijalla on kuitenkin vapaus valita, mitä hän merkitsee tuntemattomalla ja silti ratkaisuprosessi on samalla tavalla oikein. Edellä olleen malliratkaisun kaltaisten "poikkeuksellisten" valintojen tekeminen osoittaa opiskelijalta syvällistä ajattelun tasoa ja hahmottamiskykyä.

Pohjan lävistäjän puolikasta tarvitaan pyramidin korkeuden h ratkaisemisessa. Ratkaistaessa sekä lävistäjän puolikasta a että korkeutta h tutkimme pohjan lävistäjän ja huipun kautta kulkevaa tasoa, jolloin leikkauskuvio on tasakylkinen kolmio. [30, s. 153] Pohjan lävistäjän puolikkaan a laskemisessa on hyödynnetty taulukkokirjoista löytyvää muistikolmiota tasakylkiselle kolmiolle. Pythagoraan lauseella voidaan laskea pyramidin korkeus h(5.37–5.40). Tämän jälkeen voimme sijoittaa lasketut arvot pyramidin tilavuuden lausekkeeseen (5.41–5.43).

Pyramidin tilavuuden lausekkeesta on mahdollista muodostaa funktion f lauseke, derivoida se ja määrittää funktion f suurin ja pienin arvo. Määrittelyväli lähtee nollasta, koska pituus ei voi olla negatiivinen. Funktio on jatkuva tietyllä suljetulla välillä. Tämä ominaisuus todistetaan luvussa 5.3.3. Jos opiskelija ei ole hahmottanut tehtävää, ei hän osaa muodostaa suljettua määrittelyväliä ja tehtävän ratkaisuprosessi vaikeutuu huomattavasti. Funktion f valinnassa kannattaa pyrkiä mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon. Malliratkaisussa on jätetty vakio $\frac{4}{3}$ huomiotta, koska se ei vaikuta ratkaisuun. Tässäkin kohtaa opiskelija osoittaa ajattelun eri tasoja valitsemallaan funktiolla. Syvällisesti derivaatan ominaisuudet ymmärtänyt opiskelija jättää vakion huomiotta, jolloin derivointi on huomattavasti yksinkertaisempaa. Vaiheissa (5.44–5.48) derivoidaan käyttäen tulon derivointikaavaa. Tulon derivointikaava johdetaan luvussa 5.3.3. Vaiheissa (5.49–5.52) ratkaistaan osoittajan nollakohdat ja on huomattava tarkastella määrittelyvälille kuuluvia muuttujan x arvoja. Lisäksi derivaattafunktion määrittelyväli on avoin eikä suljettu väli, joka opiskelijan tulee huomioida.

Tehtävän ymmärtämistä osoittaa myös se, että opiskelija laskee millä muuttujan x arvolla funktio saa suurimman arvonsa. Pintaymmärtäminen johtaa yleensä siihen, että opiskelijat sortuvat merkitsemään saadun muuttujan x arvon tehtävän ratkaisuksi eivätkä laske funktion arvoa. Toinen yleinen virhe on, että opiskelijat sijoittavat saadut muuttujan x arvot derivaattafunktioon ja saavat vääriä tuloksia.

5.3.3 Tehtävään 3. liittyvä matemaattinen teoria

Tässä kappaleessa esitetään matemaattinen perustelu suurimman ja pienimmän arvon laskemiseen. Tehtävän ajatteluprosessissa oletetaan huomattavasti matemaattisia tuloksia funktion jatkuvuudesta, derivoituvuudesta sekä funktion suurimmasta ja pienimmästä arvosta. Seuraavaksi osoitamme todeksi useita derivointiin liittyviä tuloksia.

Funktion jatkuvuus

Lause 5.3 (Bolzanon lause) [26, s. 101] *Oletetaan, että funktio f on suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva. Jos $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset, niin on olemassa sellainen $c \in \,]a, b[$, että $f(c) = 0$.*

Todistus. Sivuutetaan. Tarkka todistus esitetty Pertti Koiviston Tampereen Yliopiston Analyysi 1 -kurssin luentomonisteessa [26, s. 101–102] □

Lause 5.4 [26, s. 103] *Suljetulla välillä $[a,b]$ jatkuva funktio f on tällä välillä rajoitettu.*

Todistus. Sivuutetaan. Tarkka todistus esitetty Pertti Koiviston Analyysi 1 -kurssin luentomonisteessa. [26, s. 103–104] □

Derivaatta

Tehtävässä on oleellista ymmärtää mitä derivaatalla tarkoitetaan. Pertti Koiviston Tampereen Yliopiston Analyysi B -kurssin luentomuistiinpanoissa annetaan funktion derivaatalle seuraava määritelmä:

Määritelmä 5.2 [31, s. 6] Funktio f on *derivoituva* pisteessä x, jos raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

on äärellisenä olemassa. Kyseistä raja-arvoa sanotaan tällöin funktion f *derivaataksi* pisteessä x ja merkitään *f'(x)*. Edelleen funktio f on derivoituva avoimella välillä $]a, b[$, jos funktio f on derivoituva välin jokaisessa pisteessä. Funktio f on derivoituva suljetulla välillä $[a, b]$, jos f on derivoituva välin jokaisessa sisäpisteessä ja lisäksi funktion f toispuoleiset derivaatat ovat äärellisenä olemassa. [31, s.10]

Funktion suurin ja pienin arvo

Pertti Koiviston Analyysi 1 -kurssin luentomuistiinpanoissa funktion ääriarvo määritellään seuraavasti:

Määritelmä 5.3 [26, s. 179] Funktiolla f on pisteessä x_0 *paikallinen maksimi*, jos on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{kaikilla} \quad x \in U_\delta(x).$$

Derivoituva funktio voi suljetulla välillä $[a,b]$ saada suurimman ja pienimmän arvon välillä $]a,b[$ olevien derivaattafunktioiden nollakohdissa sekä välin päätepisteissä a ja b. [32, s. 93]

Pertti Koiviston Analyysi 1 -kurssin luentomuistiinpanoissa yllä esitetty lause esitetään huomautuksena seuraavasti:

Huomautus 5.1 [26, s. 184] Jos funktiolla f on välillä I suurin ja/tai pienin arvo, niin se saavutetaan joko

1. välin sisäpisteessä paikallisessa ääriarvokohdassa, tai
2. väliin mahdollisesti kuuluvassa päätepisteessä.

Weierstrassin minimi-maksimi-lauseen mukaan:

Lause 5.5 [26, s.104] *Suljetulla välillä* $[a,b]$ *jatkuva funktio* f *saavuttaa tällä välillä suurimman ja pienimmän arvonsa.*

Todistus. [26, s. 104–105] Lauseen 5.4 nojalla f on ylhäältä rajoitettu välillä $[a,b]$, joten on olemassa

$$M = sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Osoitetaan, että on olemassa sellainen

$$c \in [a, b] \text{ että } \quad f(c) = M.$$

Tehdään vastaoletus:

$$f(x) \neq M \quad \text{kaikilla} x \in [a, b].$$

Koska $M = sup\{f(x) \mid x \in [a,b]$, niin tällöin $f(x) < M \quad$ kaikilla $\quad x \in [a,b]$. Täten funktio

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

on jatkuva välillä $[a,b]$ (ks. [26, s. 95]). Siis g on lauseen 5.4. nojalla ylhäältä rajoitettu välillä $[a,b]$, joten on olemassa sellainen $M' > 0$, että

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq M' \qquad \text{kaikilla} \quad x \in [a,b]$$

eli

$$\frac{1}{M'} \leq M - f(x) \qquad \text{kaikilla} \quad x \in [a,b].$$

Siis

$$f(x) \leq M - \overbrace{\frac{1}{M'}}^{>0} \qquad \text{kaikilla} \quad x \in [a,b].$$

Koska $M = sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$, on tämä mahdotonta.

Näin ollen on olemassa ainakin yksi sellainen piste $c \in [a,b]$, että

$$f(c) = M.$$

Täten f saavuttaa suurimman arvonsa välillä $[a,b]$. Samalla tavoin voidaan osoittaa, että f saavuttaa välillä $[a,b]$ myös pienimmän arvonsa tarkastelemalla infimumia. [26, s. 104–105] $\square$

Supremumin ja infimumin käsitteet esitetään kurssin alussa ja ne oletetaan tässä todistuksessa tunnetuiksi.

Todistus ylittää lukion matematiikalle asetetut vaatimukset, mutta lahjakkaat opiskelijat voivat oivaltaa todistuksen avulla enemmän.

Tulon derivointikaavan johtaminen

Muodostamalla erotusosamäärä funktiosta $(fg)'(x)$ saadaan [31, s. 13–14]:

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to0} \frac{f(x+h)[g(x+h) - g(x)] + g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to0} [\underbrace{f(x+h)}_{\to f(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h}]
\end{aligned}$$

Tämä kaavan johtaminen on sen verran yksinkertainen osoittaa, että ylioppilaskokeissa voidaan testata kokelailta tätä.

5.4 Mukautuva päättely

Tehtävä 4. on viimeisen valtakunnallisen syventävän kurssin tehtävä. Monen vuoden ylioppilaskokeissa on ollut differentiaali- ja integraalilaskentaan liittyviä ylioppilaskokeen vaativimpia tehtäviä. Mukautuvan päättelyn tehtävissä opiskelijalta odotetaan syvällistä matemaattista ymmärrystä, taitoa hyödyntää erilaisia todistustekniikoita ja soveltaa matemaattista tietoa.

5.4.1 Tehtävän 4. ratkaisuprosessi

Itseisarvon määritelmän perusteella (Määritelmä 5.1)

$$|x-t| = \begin{cases} x-t, & \text{kun} \quad x \geq t \\ -x+t, & \text{kun} \quad x < t \end{cases} \tag{5.55}$$

Näin ollen funktio muuttuu riippuen t:n arvosta.

$$e^{-|x-t|} = \begin{cases} e^{-(x-t)} = e^{-x+t}, & \text{kun} \quad x \geq t \\ e^{-(-x+t)} = e^{x-t}, & \text{kun} \quad x < t \end{cases} \tag{5.56}$$

Siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|}\, dx = \int_{-\infty}^{t} e^{x-t}\, dx + \int_{t}^{\infty} e^{-x+t}\, dx \tag{5.57}$$

$$\int_{s}^{t} e^{x-t}\, dx = \Big/_{s}^{t}\, e^{x-t} = e^0 - e^{s-t} \to e^0 = 1, \text{kun} \quad s \to -\infty \tag{5.58}$$

$$\int_{t}^{s} e^{-x+t}\, dx = \Big/_{t}^{s} -e^{-x+t} = -e^{-s+t} + e^0 \to e^0 = 1, \text{kun} \quad s \to \infty \tag{5.59}$$

Molempien integraalien arvo on 1, joten

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|}\, dx$$

suppenee ja arvo on $1+1=2$. Siis funktio f on määritelty kaikkialla ja $f(t) = 2$ kaikilla t.

5.4.2 Tehtävän 4. matemaattinen ajatteluprosessi

Tehtävä alkaa *Osoita*-sanalla, joka kertoo opiskelijalle, että varsinaisen ratkaisuprosessin lisäksi on välivaiheet perusteltava täsmällisesti. Tehtävän alku voi hämmentää monia. Anna-Kaisa Viertola vertaili Pro gradu -tutkielmassaan vuosien 2000-2010 kevään ylioppilaskirjoitusten todistustehtävien pistekeskiarvoa ja tehtävään vastanneiden määrää. Tutkimus ja kentällä havaittu suhtautuminen todistustehtäviin korreloivat hyvin toisiaan. Huonoon pistekeskiarvoon toki vaikuttavat myös tehtävien vaikeutuminen ylioppilaskokeen loppua kohti. [33, s. 23–24] Todistus- ja osoitustehtävät vaativat opiskelijalta syvällistä ajattelun tasoa ja tietojen yhdistämistä ja soveltamista suoraan matemaattisesti abstraktilla kielellä. Todistustehtäviin on hankala saada apua reaalimaailmasta.

Tehtävänannon monimutkaisen näköinen integraalifunktio saattaa myös karkottaa tehtävän tekijöitä. Jos tehtävään kuitenkin tarttuu, on ennen integrointia mietittävä itseisarvon määritelmää. (ks. Määritelmä 5.1.) Kun itseisarvon määritelmän avulla on saatu muuttujasta t riippuvat integrointifunktiot, on vuorossa integraalifunktion muodostaminen. Ylä- ja alarajalla epäoleellisiin integraaleihin löytyy kirjan teoriasivuilta ”ratkaisukaava” [5, s. 114–115]. On siis valittava jokin luku t, joka on ensimmäisen integraalifunktion ylärajalla ja summataan tämä integraalifunktion kanssa, jossa t on alarajalla. Jos opiskelijan proseduraalinen sujuvuus ei ole tarpeeksi kehittynyttä ja rutiinia integraalilaskentaan ei ole syntynyt, on tehtävän ratkaisuprosessia vaikea jatkaa.

Tehtävässä ei suoraan sanota, että on tarkasteltava integraalin suppenemista, mutta epäoleellisten integraalien laskeminen tapahtuu tarkastelemalla suppenemista ja hajaantumista. Tämä teoreettinen proseduuriin vaikuttava tieto, on opiskelijalla oltava hallussa. Se miksi näin toimitaan, ei varmasti monelle lahjakkaallekaan opiskelijalle ole selvää, sillä lukiotasolla tulokset joudutaan olettamaan itsestään selvinä todistustekniikoiden ollessa lukioon liian monimutkaisia.

Tehtävänanto sisältää myös monia matemaattisia käsitteitä, kuten *reaaliarvoilla* ja *integroidussa muodossa*. Opiskelijan on kyettävä selittämään matemaattisia käsitteitä (käsitteellinen ymmärtäminen) ja soveltaa rutiinilaskennan taitoja monipuolisemmin (strateginen kompetenssi). Tehtävä vaatii myös pitkäjänteistä työskentelyä ja uskallusta haastaa itsensä (yritteliäisyys). Mukautuvalle päättelylle tyypillinen tehtävä sisältääkin kaikkia matemaattisen osaamisen osa-alueita (Kuva 3.1 s. 16).

5.4.3 Tehtävään 4. liittyvä matemaattinen teoria

Tehtävään liittyvä teoria on hajanaista ja tiettyjä ominaisuuksia hyödynnetään todistamatta. Tämä on ymmärrettävää, sillä monet epäoleelliseen integraaliin liittyvät todistukset ylittävät lukiotason vaatimukset. Tehtävän peruskysymys lähtee liikkeelle siitä, mikä integraalifunktio on, jatkuen aina epäoleellisen integraalin määritelmään ja sen ominaisuuksien todistamiseen. Tässä kappaleessa todistetaan epäoleellisen integraalin suppenemiseen liittyviä havaintoja hyödyntäen Tampereen yliopiston Analyysi 2 -kurssin luentomuistiinpanoja [34].

Integraalifunktion määritelmä

Määritelmä 5.4 [34, s. 42] Olkoon funktio f määritelty välillä I. Jos on olemassa sellainen funktio F, että

$$F'(x) = f(x) \quad \text{kaikilla} \quad x \in I,$$

niin F on funktion f *integraalifunktio* välillä I.

Epäoleellinen integraali

Integraalin suppeneminen

Olkoon f sellainen välillä $[a,b[$ määritelty funktio siten, että f on Riemann-integroituva välillä $[a,z]$ kaikilla $z \in\,]a,b[$ eli

$$\int_a^z f(x)\,dx$$

on olemassa kaikilla $z \in\,]a,b[$ [34, s. 86].

Huomautus 5.2 Tässä oletetaan Riemann-integraali tunnetuksi. [34, s. 5–6]

Määritelmä 5.5 [34, s. 86] Jos

$$\lim_{z\to b-} \int_a^z f(x)\,dx$$

on äärellisenä olemassa, sanotaan että integraali

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee, ja merkitään

$$\lim_{z\to b-} \int_a^z f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Tätä integraalia kutsutaan funktion f epäoleelliseksi integraaliksi välillä $[a,b[$. Integraali *hajaantuu* jos raja-arvo ei ole olemassa tai se ei ole äärellinen.

Määritelmä 5.6 [34, s. 92] Olkoon funktio f Riemann-integroituva jokaisella välin $]a,b[$ suljetulla osavälillä. Olkoon lisäksi $c \in\,]a,b[$. Tällöin integraali

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee, jos molemmat integraalit

$$\int_a^c f(x)\,dx \text{ ja } \int_c^b f(x)\,dx$$

suppenevat.
Tällöin

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Integraalin suppenemista voidaan epäoleellisuuspisteen sijaan tarkastella myös rajoittamattomalla välillä $]-\infty,\infty[$. Tällöin integraali määritellään jakamalla välipisteen avulla integraali kahteen osaan. Tätä on hyödynnetty myös tehtävän ratkaisuprosessissa. Siis määritelmän 5.5 kaltaisesti

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

määritellään integraalien

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx \text{ ja } \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx \quad c \in \mathbb{R}$$

avulla. [34, s. 116] Nyt suppenemista voidaan tarkastella kummallekin integraalifunktiolle erikseen.

5.4.4 Yhteenveto

Tehtävien tarkoituksena oli osoittaa Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin luoman matemaattisen ajattelun osa-alueiden toteutuminen matematiikan ylioppilaskirjoituksissa. Samalla tehtävien matemaattisen analysoinnin tehtävänä oli näyttää matemaattisen ymmärtämisen ja ajattelun keskeinen merkitys matemaattiselle osaamiselle. Matematiikan osa-alueiden viides kohta Matemaattinen yritteliäisyys on oleellisena osana jokaisen edellä esitetyn tehtävän ratkaisuprosessissa. Motivaatio, kiinnostus matematiikkaa kohtaan ja puhdas yritteliäisyys haastavat opiskelijaa tarttumaan monimutkaisempiin tehtäviin, kyseenalaistamaan ratkaisun oikeellisuutta ja näkemään matematiikan tärkeänä osana yhteiskunnan toimintoja ja elämää. Ratkaisuprosessien vaiheet ja matemaattiset todistukset antavat osviittaa matematiikan sähköiselle ylioppilaskokeelle. Perusteluja ratkaisuprosessiin tullaan vaatimaan tarkemmin ja useimmat edellä esitetyistä todistuksista on mahdollista osata myös lukiotasolla. Hyödynsin tehtävien teossa teknisiä apuvälineitä, joita opiskelijoilla on keväällä 2019 käytössään matematiikan ylioppilaskokeessa, eli laskinohjelmistoa Ti-Nspire sekä Geogebraa.

Luku 6

Pohdinta

On selvää, että matematiikan ylioppilaskokeen tehtävien vaikeusasteen ja rakenteen on muututtava sähköistymisen myötä. Edellä valitut ja analysoidut neljä tehtävää on suhteellisen yksinkertaista ratkaista symbolisella laskimella ilman ymmärrystä. Uudessa opetussuunnitelmassa [6] MAA11-kurssiin sisällytetään enemmän opetusta matemaattisesta todistamisesta ja todistustekniikoista. Ylioppilaskirjoituksissakin proseduurien ja rutiinilaskennan sijaan on syytä testata käsitteiden ja tehtyjen toimenpiteiden syvällisempää ymmärtämistä. Miksi voimme käyttää pisteen etäisyys suorasta -kaavaa tai miksi voimme mainita, että funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa tietyllä välillä. Opiskelijoilta voidaan vaatia nykyisiä kokeita enemmän matemaattisia perusteluja ajattelun selventämiseksi. Yhtenä perusteluna voisi olla toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan johtaminen tai tietyn kaavan käytön todistaminen. Edellä esitetyt todistukset on mahdollista ymmärtää myös lukiotasolla.

Uudessa opetussuunnitelmassa opiskelijaa johdatellaan yhä aikaisemmin ottamaan vastuuta omasta oppimisestaan matematiikassa. Alakoulusta asti matematiikan opetuksessa ja oppimisen arvioinnissa painotetaan oppilaan ymmärtämistä eikä niinkään mekaanisen laskemisen osaamista. Näin ollen lukioon tultaessa opiskelijoilla on laaja-alainen näkemys matematiikasta. Kuten Haapasalo artikkelissaan *Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää* pohtii, on johtopäätökseni, että ymmärrys on matematiikassa niin keskeisessä osassa, että ilman ymmärrystä ei sovellustehtäviä osaa ratkaista. Laskemista ei kuitenkaan pidä vähätellä, sillä samankaltaisten tehtävien laskeminen harjaannuttaa laskurutiinia, jolla tietyn tyyppiset proseduraalista sujuvuutta testaavat tehtävät onnistuvat hyvin ilman varsinaista ymmärrystä.

6.1 Sähköisten ylioppilaskokeiden hyödyt ja haasteet

Muualla Euroopassa käytössä olevat sähköiset ylioppilaskokeet antavat suuntaviivoja Suomen sähköisille ylioppilaskokeille. Virheistä opitaan ja hyväksi todetut tietotekniset ratkaisut siirtyvät myös Suomen koejärjestelmään. Luonnollisena jatkumona voidaan pitää internetin rajatun käytön sallimista ylioppilaskokeissa. Internetin käyttö vaatii monipuolisia medialukutaitoja ja tiedon kriittistä arviointia jokaisessa kirjoitettavassa oppiaineessa. Matematiikassa internetin käyttö ei tuo suoranaista hyötyä, koska sovellustehtävät vaativat aina tehtävän ymmärtämistä. Ymmärtämisen jälkeen tehtävä on selkeä kokonaisuus ratkaista, johon CAS-ohjelmistotkin pystyvät internetin tapaan.

6.1.1 Koulut ja tietotekninen kehitys

Koulut seuraavat yhteiskunnan ja maailman kehitystä. Vähitellen ajan saatossa olemme siirtyneet helmitaulujen ja laskutikkujen kautta graafisiin laskimiin ja nyt lopulta CAS-ohjelmistoihin. Näin ollen ylioppilaskokeet seuraavat aikaansa ja testaavat opiskelijoiden kontekstisidonnaista kypsyyttä. Pelko opiskelijoiden matematiikan yhä alenevista oppimistuloksista ei kuitenkaan ole turha. On totta, että CAS-ohjelmistolla on mahdollista ratkaista suurin osa nykymuotoisen ylioppilaskokeen tehtävistä. Kokelaiden ei tarvitse osata kuin näpytellä oikeat komennot ohjelmistoon ja vastaus on heti luettavissa. Siksi sähköiset ylioppilaskokeet ovat tervetullut uudistus. Rutiinilaskennasta tullaan siirtymään soveltaviin tehtäviin, joissa opiskelijoiden on ymmärrettävä matematiikkaa monipuolisesti. Oikeiden toimintojen löytäminen CAS-ohjelmistosta vaatii opiskelijoilta jäsennys- ja hahmottamistaitoja. Matematiikassa on aiemmin vierastettu esseemuotoisia tehtävätyyppejä ja pidetty niitä enemmän reaalikokeen tehtävinä. Nyt sähköisten ylioppilaskokeiden myötä rutiinilaskennan tehtävä voidaan muuttaa esseemuotoiseksi, jolloin opiskelijan on sanoin kuvailtava testattavaa ilmiötä ja keksittävä siihen vielä esimerkkilasku. Tällaisia ”keksi esimerkki” -tyyppisiä tehtäviä suositaan yliopistossa matematiikan tenteissä. Esimerkin keksiminen vaatii kypsyyttä soveltaa rutiinilaskentaa erilaisiin matemaattisiin tapauksiin.

Ennen kevään 2016 ylioppilaskoetta kaikissa ylioppilaskokeen tehtävissä sai käyttää laskinta apuna. Näiden kokeiden muutama ensimmäinen tehtävä sisälsi rutiininomaista laskentaa, jossa kokelailta testattiin lausekkeiden sieventämistä, yhtälöiden ratkaisua, derivointia ja integrointia. Nämä tehtävät olisi yksinkertaista ratkaista CAS-ohjelmistolla. Kynällä ja paperilla on kuitenkin tärkeää osata ratkaista tällaiset tehtävät. Käsin laskettaessa käsitteet ymmärretään selkeämmin ja ominaisuudet sisäistetään paremmin. Matematiikan sähköinen ylioppilaskoe on kaksiosainen, jossa toisessa osassa laskinta ei saa käyttää. Näin varmistetaan, että kokelaat oppivat ratkaisemaan myös tärkeitä peruslaskutoimituksia.

Sähköistymisen myötä matematiikan toiminnot nopeutuvat. Monissa matematiikan tehtävissä toistuvat samat lainalaisuudet, kuten kaavat ja yhtälöt. Tietokoneen avulla kaavat on helppo kopioida seuraaviin laskuihin, kun ne on kerran kirjoittanut. Alussa ohjelmistoilla kirjoittaminen ja laskeminen voi tuntua hankalalta, mutta hyvin nopeasti toiminnot tulevat tutuiksi ja näppäily automatisoituu. Mallikuvien piirtäminen kuvaajaohjelmistoilla on kätevää. Opettajien ja sensorien on yksinkertaista tarkistaa kokeita, kun kaikkien käsialasta saa selvää, symbolit ovat yksiselitteisiä ja mallikuvat selkeitä.

Kuten tutkielman neljän tehtävän analysointi osoitti, ei sähköisen ylioppilaskokeen tarvitse teknisten apuvälineiden vuoksi muuttua merkittävästi. Lukion vanhan opetussuunnitelman kirjoista valituista tehtävistä ei suoraan laskimella ollut laskettavissa kuin yksi tehtävistä. Muuttamalla tehtävien asettelua todistuksiksi tai sanallisiksi tehtäviksi, saadaan samat aihesisällöt testattua luotettavalla tavalla.

Symboliset laskimet ja CAS-ohjelmistot vaativat tietoja ja taitoja ohjelmoinnin alkeista. Opiskelijoiden on ymmärrettävä komentojen seuraukset ja syötteiden merkitykset. Uudessa opetussuunnitelmassa [6] mainitaan myös ohjelmoinnin opetus opiskelijoille. Uudistus seuraa hyvin teknistyvän yhteiskunnan vaatimuksia.

6.1.2 Vertailu lukiolaisten nelikenttään ja matemaattiseen ajatteluun

Tarkasteltaessa sähköisten ylioppilaskokeiden vaikutusta matemaattiseen ajatteluun sekä Joutsenlahden esiin tuomaan matematiikan opiskelijoiden nelikenttään, sähköiset ylioppilaskokeet eivät tuo ainakaan helpotusta. Suoriutujat, luovuttajat ja pettyjät eivät menesty matematiikan ylioppilaskokeessa aikaisempaa paremmin, koska tietotekniikan opettelu vie energiaa ja aikaa tehtävien ymmärtämiseltä. Lisäksi kokeiden soveltavammat tehtävät heikentävät proseduraaliseen tietoon luottavien opiskelijoiden menestystä. Opiskelijat, joilla on vahva motivaatio matematiikan opiskelua kohtaan, hyötyvät sähköisten ylioppilaskokeiden mukanaan tuomasta uudistuksesta. Jo ennestään hyvin matematiikassa menestyneet opiskelijat kokevat oppituntien teknisten apuvälineiden opettelun ja niillä laskemisen innostavaksi. Soveltavien tehtävien monipuolinen laskeminen ja tehtävissä onnistuminen kannustavat eteenpäin matematiikan opiskelussa. Matematiikan selkeä ja johdonmukainen rakenne saattaa kärsiä teknisten apuvälineiden johdosta. Opiskelijoiden oli ennen helppoa sisäistää, että laskin toimii olennaisena osana matematiikan opiskelua. Nyt opiskelijat saattavat miettiä, mihin tehtävään käyttävät mitäkin ohjelmaa tai jopa pelätä osaamattomuuttaan erilaisten ohjelmistojen viidakossa. Opiskelijat, jotka ennen motivoituivat matematiikan opiskeluun lukion loppuvaiheessa (kypsyjät), voivat lopulta lukeutua luovuttajien tai pettyjien ryhmään, koska he eivät kaikelta ylimääräiseltä näe matematiikan lukio-opintojen punaista lankaa.

Motivaation puute edellä esitetyistä syistä johtuen, johtaa Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin matemaattisen ajattelun köynnöksen purkautumiseen. Matemaattinen yritteliäisyys, halu oppia ja ymmärtää matematiikkaa, on matemaattisen ajattelun köynnöksen kannatteleva voimavara. Ilman matemaattista yritteliäisyyttä ja motivaatiota ei matematiikassa voi menestyä, vaikka erilaiset tehtävätyypit olisivat hallinnassa.

6.1.3 Kritiikkiä ja avoimia kysymyksiä sähköisestä ylioppilaskokeesta

Huoli matematiikan sähköisen ylioppilaskokeen arvioinnista ei ole turha. Sensorit ovat varmasti tottuneet luovimaan ja objektiivisesti arvioimaan aikaisemmissakin kokeissa esiintyneitä erilaisia ratkaisumalleja, mutta nyt sähköistymisen myötä luovat ratkaisut saattavat olla ohjelmistojen aikaansaannoksia enemmänkin kuin opiskelijan omaa oivaltavuutta. Opettajilla ei välttämättä ole tietoa siitä, minkälainen vastaus on riittävä, kun aikaisemmin kokeissa täysiin pisteisiin on vaadittu hyvinkin yksityiskohtaiset välivaiheet. Lisäksi CAS-ohjelmistot sisältävät monia ominaisuuksia, jotka yltävät lukion oppimäärän ulkopuolelle. Ohjelmisto saattaa antaa useampaan tehtävään kompleksitason vastauksia, jolloin opiskelija saattaa tietämättään merkitä niitä myös koevastaukseen. Onko opiskelija nyt vain tietämättään laittanut kompleksitason vastauksen vai osoittaako hän nyt omaa kiinnostustaan matematiikkaa kohtaan? PISA-tutkimuksen valossa suomalaisten matematiikan osaaminen on laskenut, joten seuraavat tutkimukset tulevat osoittamaan auttaako tietotekninen kehitys ja uusi opetussuunnitelma nostamaan matematiikan osaamisen aiemmalle arvostetulle tasolle.

Monet sähköisen ylioppilaskokeen vastustajat pohtivat erityisesti opiskelijoiden tasa-arvoisuutta. Jokaisen opiskelijan on ostettava kannettava tietokone ja siihen asennettava ohjelmistot. Kaikilla perheillä ei ole taloudellisesti mahdollista ostaa parasta ja kalleinta tietokonetta. Ylioppilastutkintolautakunta on asettanut hyvin väljät vaatimukset kokelaiden tietokoneille. Ne eivät vaadi mitään huippuominaisuuksia. Ohjelmistot ovat kuitenkin ilmaisia, kannettava tietokone kulkee mukana myös jatko-opintoihin ja se on keskeinen työväline lukion ajan. Useilla kouluilla on koulun omia koneita, joita voidaan hyödyntää tilanteessa, jossa opiskelijalla ei ole mahdollisuutta omaan koneeseen. Kenenkään opiskelijan opiskelu ei varmasti jää kiinni tietokoneesta.

6.2 Jatkotutkimuskohteet

Aina tutkielman aikana on hyvä pohtia myös jatkotutkimuskohteita. Sähköiset ylioppilaskokeet avaavat monipuolisia ja mielenkiintoisia tutkimuskohteita eri tieteenaloille. Monet aiheista ovat sellaisia, että niitä on mahdollista pohtia vasta, kun sähköisiä ylioppilaskokeita on järjestetty useampi vuosi.

Vievätkö sähköiset ohjelmistot tilaa matematiikan oppimiselta ja ymmärtämiseltä? Kuinka opiskelijat kokevat sähköiset ylioppilaskokeet? Lukiolaisten tietotekniikkataidoista on tehty aiemminkin tutkimuksia (mm. Opetushallitus), mutta olisi mielenkiintoista nähdä miten asenteet muuttuvat, kun lukiolaiset aloittavat opiskelun sähköisiä ylioppilaskokeita varten.

Herää myös kysymys, johtaako matematiikan sähköinen ylioppilaskoe siihen, että matemaattisten apuvälineiden käytöstä tulee oppimisen edellytys. Nyt apuvälineet ovat helpottaneet matematiikan opiskelua, mutta ne eivät ole olleet pakollisia työkaluja. Matematiikan tunneilla on painotettu tehtävien ymmärtämistä ja mekaanisten laskutoimitusten oppimista kynän ja paperin avulla.

Nuoret opettajat ratsastavat tietotekniikan aallonharjalla ja vanhemman polven opettajat ovat pitkän työuran tehneenä tottuneet vähitellen tietoteknistyvään yhteiskuntaan ja kouluttaneet itseään ajan vaatimalla tavalla. Itsensä kouluttaminen ja täydennyskoulutus ovatkin opettajien velvollisuus, jotta he pystyvät opettamaan ajantasaista tietoa. Mutta aina tämä ei erinäisistä syistä ole mahdollista. Lisäksi opettajat joutuvat opettelemaan kaikkien kokeessa sallittujen ohjelmistojen monipuolisen käytön, vaikka opiskelijat pärjäävät kokeessa muutaman perusohjelmiston avulla. Opettajilta vaaditaan jatkossa huolellista tuntien suunnittelua. Kotitehtävien on oltava monipuolisia unohtamatta ohjelmistoilla ratkaistavia tehtäviä. Opettajien on suunniteltava, minkä matematiikan kurssin aihepiiriin sopii pedagogisesti järkevästi minkäkin ohjelmiston opettaminen. Kaikkien ohjelmistojen käyttöä olisi syytä opettaa ja keskeisimpiä työkaluja ottaa esille joka kurssissa. Miten opettajat siis kokevat muutoksen? Onko iän, sukupuolen tai paikkakunnan välillä eroja?

Monet näistä jatkotutkimuskohteista tulevat antamaan merkittävää tietoa yhteiskunnalle ja koulutuksenjärjestäjille täydennyskoulutustarpeista, niistä haasteista, joihin ala- ja yläkoulussa tulisi panostaa sekä tietoa siitä, onko jokaisella opiskelijalla oikeus tasa-arvoiseen ja samanlaatuiseen koulutukseen.

Kirjallisuutta

[1] P. Kupari, J. Välijärvi, L. Andersson, I. Arffman, K. Nissinen, E. Puhakka, J. Vettenranta, *PISA 2012: Ensituloksia* [verkkodokumentti], Opetus- ja kulttuuriministeriö 2013, [Viitattu 31.5.2016]. URL
$http://www.minedu.fi/OPM/Tiedotteet/2013/12/pisa.html$

[2] J. Kangasaho, J. Mäkinen, J. Oikkonen, J. Paasonen, M. Salmela, J. Tahvanainen, *Pitkä matematiikka 2 polynomifunktiot*, s. 177, WSOY 2005

[3] J. Kangasaho, J. Mäkinen, J. Oikkonen, J. Paasonen, M. Salmela, J. Tahvanainen, *Pitkä matematiikka 4, Analyyttinen geometria*, s. 213, WSOY 2006

[4] J. Kangasaho, J. Mäkinen, J. Oikkonen, J. Paasonen, M. Salmela, J. Tahvanainen, *Pitkä matematiikka 8, Juuri- ja logaritmifunktiot*, s. 195, WSOY 2006

[5] J. Kangasaho, J. Mäkinen, J. Oikkonen, J. Paasonen, M. Salmela, J. Tahvanainen, *Pitkä matematiikka, Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi*, s. 177, WSOY 2007

[6] Lukion opetussuunnitelmien perusteet 2015 [Verkkodokumentti], Opetushallitus, s. 279, Helsinki, 2015 [Viitattu 31.5.2016]. URL
$http://www.oph.fi/download/172124\_lukion\_opetussuunnitelman\_perusteet\_2015.pdf$

[7] Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003 [Verkkodokumentti], Opetushallitus, s. 254, Vammala, 2003 [Viitattu 31.5.2016]. URL
$http://www.oph.fi/download/47345\_lukion\_opetussuunnitelman\_perusteet\_2003.pdf$

[8] E. Salmenkivi, *Ylioppilastutkinnon rakenne ja reaalikoeuudistusten vaikutuksia: miten lisääntynyt valinnaisuus ohjaa lukiolaisia*, Kasvatus & aika 7 (3), s. 24–39, 2013

[9] Sähköinen ylioppilastutkinto- Matematiikka [Verkkodokumentti], Ylioppilastutkintolautakunta, s. 3 [Viitattu 1.6.2016]. URL
$https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston\_tiedostot/Sahkoinen\_tutkinto/fi\_sahkoinen\_matematiikka.pdf$

[10] Pääministeri Jyrki Kataisen hallituksen ohjelma [Verkkodokumentti], Valtioneuvoston kanslia, s. 90, 2011 [Viitattu 1.6.2016]. URL
$http://valtioneuvosto.fi/documents/10184/147449/Kataisen+hallituksen+ohjelma/81f1c20f-e353-47a8-8b8f-52ead83e5f1a$

[11] S.Kivelä, Symbolinen laskenta ja koulumatematiikan tulevaisuus [Verkkodokumentti], s. 11, [Viitattu 2.6.2016]. URL
http : //www.maol.fi/fileadmin/users/EDimensio/2012/Artikkelit/kivela.pdf

[12] Lukiolaki 21.8.1998/810, Finlex [Verkkodokumentti] 1998 [Viitattu 23.8.2016] URL
http : //www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/1998/19980629

[13] Laki ylioppilastutkinnon järjestämisestä 26.8.2005/672, Finlex [Verkkodokumentti] 2005 [Viitattu 23.8.2016] URL
http : //www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/2005/20050672

[14] Matematiikan kokeen määräykset 16.3.2016 [Verkkodokumentti] Ylioppilastutkintolautakunta s. 8, 2016 [Viitattu 23.8.2016] URL
https : //www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot /Ohjeet/Koekohtaiset/fi_maaraykset_matematiikka.pdf

[15] E. Hietakymi,*Katsaus eurooppalaisiin sähköisiin koejärjestelmiin ja matematiikan ylioppilaskokeisiin* [Verkkodokumentti], Digabi-projekti, Ylioppilastutkintolautakunta, s. 19, 2013 [Viitattu 1.6. 2016]. URL
https : //www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Raportit _tutkimukset/digabi_tyoraportti_2013_10.pdf

[16] R. Yrjönsuuri, *Matematiikka mieluisaksi- psykologinen lähestymistapa opetukseen ja opiskeluun sekä matemaattisen ajattelun osaamisen arviointiin*, OPPILO, s. 260, Anjalankoski, 2007

[17] L. Haapasalo, *Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää?* Teoksessa *Matematiikka- näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*, Räsänen, Kupari, Ahonen, Malinen (toim.), s. 50–83, Niilo Mäki instituutti, Jyväskylä, 2004

[18] P. Ruohotie, *Motivaatio, tahto ja oppiminen*, s. 164, Helsinki, 1998

[19] J. Joutsenlahti, *Matemaattinen ajattelu lukiossa*, Teoksessa *Matematiikka-näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*, Räsänen, Kupari, Ahonen, Malinen (toim.), s. 363–380, Niilo Mäki instituutti, Jyväskylä, 2004

[20] J. Joutsenlahti, *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä- 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä* [Verkkodokumentti], Akateeminen väitöskirja, s. 271, 2005 [Viitattu 8.6.2016]. URL
http : //tampub.uta.fi/bitstream/handle/10024/67453/951 − 44 − 6204 − 1.pdf?sequence = 1

[21] J. Kilpatrick, J. Swafford, B. Findell (toim.), *Adding It Up: Helping Chidren Learn Mathematics*, s. 439, Washington DC: National Academies Press, 2001

[22] T. Krook, Matemaattinen osaaminen ylioppilaskokeissa ja korkeakoulujen pääsykokeissa [Verkkodokumentti] sivuainetutkielma, s. 81, 2014 [Viitattu 8.6.2016] URL *https : //tampub.uta.fi/bitstream/handle/10024/95403/GRADU − 1401263907.pdf?sequence = 1*

[23] B. Kutzler, *The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics*, s. 12, 2000 [Viitattu 21.10.2016] URL $http://cchsindy.org/bird/Smart/Calc1/AlgebraicCalculatorPedtoolKutzler.pdf$

[24] R. Yrjönsuuri,*Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen*, Teoksessa *Matematiikka- näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*, Räsänen, Kupari, Ahonen, Malinen (toim.) s. 111–122, Niilo Mäki instituutti, Jyväskylä, 2004

[25] Pitkän matematiikan ylioppilaskoe [Verkkodokumentti], Ylioppilastutkintolautakunta, kevät 2015 [Viitattu 10.6.2016] URL $http://yle.fi/progressive/fynd/oppiminen/oppiminen.yle.fi/yo-kokeet/matematiikka_pitka_k15.pdf$

[26] P.Koivisto, *Analyysi 1* [Verkkodokumentti] s. 185, Informaatiotieteiden yksikön raportteja, Tampereen Yliopisto, 2016 [Viitattu 21.10.2016] URL $https://tampub.uta.fi/bitstream/handle/10024/99677/978-952-03-0222-1.pdf?sequence=1$

[27] H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Algebra* applications version, tenth edition, s. 1276, 2010, John Wiley& Sons, Inc.

[28] P. Haukkanen, *Lineaarialgebra 1A*, Tampereen yliopisto, Informaatiotieteiden yksikkkö, s. 56, 2013

[29] J. Kangasaho, J. Mäkinen, J. Oikkonen, J. Paasonen, M. Salmela, J. Tahvanainen, *Pitkä matematiikka 1, Funktiot ja yhtälö*t, s. 198, WSOY 2005

[30] J. Kangasaho, J. Mäkinen, J. Oikkonen, J. Paasonen, M. Salmela, J. Tahvanainen, *Pitkä matematiikka 3, Geometria*, s. 227, WSOY 2006

[31] P. Koivisto, *Analyysi B, Derivaatta ja integraali* [Verkkodokumentti] s. 173, Tampereen Yliopisto, 2016 [Viitattu 20.6.2016] URL $http://www.sis.uta.fi/matematiikka/analyysi-b/moniste2016/Analyysi-B.pdf$

[32] J. Kangasaho, J. Mäkinen, J. Oikkonen, J. Paasonen, M. Salmela, J. Tahvanainen, *Pitkä matematiikka 7, Derivaatta*, s. 209, WSOY 2006

[33] A-K. Viertola, *Todistaminen lukion pitkässä matematiikassa*, [Verkkodokumentti] Pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto, 2011 [Viitattu 21.6.2016] URL $https://jyx.jyu.fi/dspace/bitstream/handle/123456789/36614/URN\_NBN\_fi\_jyu-2011090211319.pdf?sequence=4$

[34] C. Hollanti, *Analyysi 2*, s. 143, Tampereen Yliopisto, 2010

Liitteet

Funktio ja yhtälö MAA1	Polynomifunktiot MAA2	Geometria MAA3	Analyyttinen geometria MAA4	Vektorit MAA5	Todennäköisyyslaskenta MAA6
K12 2a (Laske lauseke)	K12 1 (Yhtälön ratkaisua)	K12 9 (Ympyräkartio)	K13 1 (Suoran yhtälö, lp)	K12 3 (Kolmion kärjet)	K12 2b (Laske !-lauseke)
S13 2c (Prosentit)	S12 1 (Yhtälön ratkaisua)	K12 15* (Ympyröiden sivuaminen)	K13 8a (käyrien lp:t)	K12 4 (pituus, projektio)	K12 6 (Odotusarvo)
K15 3 (Prosenttisovellus)	S12 2a,b (Sievennystä)	S12 4b (Kolmion sivun pituus)	S13 4 (Tangenttien kohtisuoruu	S12 9 (Vektorit, trig.funktiot)	S12 8 (Tod. Odotusarvo)
S15 1a (Vakion a määritys)	K13 1a,b (Peruslaskutoimituksia)	S12 15* (Ympyrälieriö pallon sisällä)	S13 14* (Tasokäyrien lp:t)	K13 2b (Vektorien pituus)	S12 14* (Tiheysfunktio,integr.)
K16 1 (Monivalinta, peruslaskutoimituk	K13 3 (Sievennystä, peruslaskuja)	K13 4 (Suorakulmaisen kolmion ala)	K14 5 (Ympyrän keskipiste ja sä	K13 7 (Taso ja y-akseli)	K13 6 (Perustod.)
3,731343284	S13 1 (Polynomit, ratkaise yhtälö)	K13 10 (Kuutio)	S14 2a (Suorien lp)	S13 3 (Vektorien kulma)	S13 8 (Tod.näk)
	K14 1 (Yhtälön ratkaisu,sievennys)	K13 15* (Ympyrät paraabelin sisällä)	s14 10 (Ympyrät ja janat)	S13 5 (Pisteen koorinaatit)	K14 7 (Todnäk, odotuarvo)
	K14 4 (Diskriminantti)	S13 6 (Kulman puolittaja)	K15 2a (Käyrien tason piirtämin	K14 8 (Vektorien lp)	S14 7 (Normitus, odotusarvo)
	S14 1 (Yhtälöpari, ratkaisukaava)	S13 10 (3D-mallinnus)	K15 5 (Janojen lp:t)	S14 (Käyrän yhtälö ei-vektorina)	K15 6 (Odotusarvo)
	S14 2b (Suhdeluvut)	K14 9 (Tetraedri tasossa)	S15 2 (Ympyrän säde)	S15 4 (Vektorin koordinaatit)	K15 14* (Tod.näk)
	S14 15* (Binomin neliö, Cauchy)	K14 14* (Monikulmio- sovellus)	S15 5 (Ympyrän jänteen pituus)	S15 14*(Trig.suuntavektorit)	S15 6 (Klassinen tod.näk.)
	K15 2b (Neliöjuuriyhtälön ratkaisemir	S14 14* (Ympyrä, suorat, janat	K16 8 (Suora ja taso lp:t)	K16 3a (Vektoreiden pituus ja pistetu	K16 5 (Odotusarvo)
	K15 4 (Diskriminantti)	K15 8 (Öljysäiliö-sovellus)	8,955223881	8,955223881	8,955223881
	K16 2 (Sievennys, osoitus, neliöjuuri)	S15 1b (Neliön piiri)			
	10,44776119	S15 3(Mittakaava)			
		S15 7 (Kolmion pinta-ala)			
		S15 9 (3D-sovellus)			
		S15 15* (Pythagoraan lauseen sovellus)			
		K16 6 (Geometrian sovellus)			
		K16 7 (Geometrian sovellus, Pythagoraan lause)			
		K16 13 (Geom. sovellus, useita ratkaisutapoja)			

Kuva 6.1: Matematiikan ylioppilaskoetehtävien jaottelua. Jokaisen sarakkeen alapuolella on prosenttiosuus kaikista ylioppilaskokeiden tehtävistä. Kurssit 1-6.

Derivaatta MAA7	Juuri- ja logaritmifunktiot MAA8	Trigonometriset funktiot ja lukujonot MAA9	Integraalilaskenta MAA10
K12 7a (Derivointi)	K12 2c (Sievennä ln-lauseke)	K12 2d (Sievennä lauseke)	K12 2e (Laske integraali)
S12 5 (Suurin ja pienin arvo)	K12 2f (Funktion derivatta)	K12 10 (Yhtälöiden ratkaisua)	K12 7b (Integrointi)
S13 2a (Polynomin derivaatta)	K12 5 (ln suurin arvo)	K12 14* (Hyberpolinen sini ja kosini)	S12 3b (Trig.funktion integrointi)
K14 2 (Der.kuvaajat (s.yo-kaltainen	K12 8 (Sanallinen sovellus)	S12 3a (Trig.funktion derivaatta)	S12 6 (Paraabelin ja suoran ala)
K14 3b (Derivaatta)	S12 2c (ln-yhtälön sievennys)	S12 4a (Trig.funktion arvojoukko)	K13 8b (käyrien väliin jäävä ala)
S14 6 (Käyrän derivaattasovellus)	S12 7 (Sanallinen ln-sovellus)	K13 2a (Trig. Derivaatta)	S13 2b (Trig. Integraalifunktio)
K16 4 (Derivaatan ominaisuudet)	S12 10 (e^x ratkaisut)	K13 2c (Trig. Tarkka arvo)	S13 7 (Määrätty integraali)
K16 9.2 (Erotusosamäärä ja raja-ar	S12 11 (Lukujono, osoita)	K13 9 (Trig.yhtälön ratkaisu)	K14 3a (Integraalina pinta-ala)
K16 11 (Derivaatta ja geom.sovellu	K13 5 (Funktion e^x s ja p arvo)	K13 11 (Aritmeettinen jono, ln)	K14 10 (Juustonpalan sovellus)
6,71641791	S13 9 (Janan mahdollinen pituus)	K14 13 (Aritmeettinen summa)	S14 5 (sin x- pyörähdyskappale)
	S14 2c (ln-Lausekkeen sievennys)	S14 8 (Geom.jonon osoitus)	K15 10 (Pyörähdyskappale)
	S14 3 (Derivaattasovellus)	S15 10 (Aritmeettinen ja geometrinen jono)	K16 3b (Määrätty integraali)
	S14 9 (e^x sanallinen sovellus)	8,955223881	K16 12 (Trig.funktio integraali, osoita)
	K15 1 (Yksikköympyrä)		9,701492537
	K15 (ln (sin x)) määrittely)		
	K15 9 (Telttakangas)		
	S15 8 (ln-sovellus)		
	K16 10 (Logaritmisovellus)		
	13,43283582		

Kuva 6.2: Kurssit 7-10.

K=kevät S=syksy

Logiikka ja lukuteoria MAA11	Numeeriset menetelmät MAA12	Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi MAA13
K12 12 (Viivakoodi)	K12 13 (Trig.funkt.Ip:t num. Menetelr	K12 11 (Geometria, sarjan suppeneminen)
K13 13 (Totuutaulut)	S12 12 (Puolisuunnikassääntö)	S12 13 (Raja-arvo ln-lausekkeelle)
S13 13 (Epäsuora todistus)	K13 12 (Trig. Newton)	K13 14* (Integrointi, derivointi)
S14 12 (Reaalilukuja)	S13 11 (Puolisuunnikassääntö)	S13 12 (Raja-arvot)
K15 11 (7-Järjestelmän luku)	K14 12 (Numeerinen ratkaisu)	S13 15* (Integraali, summa, raja-arvo)
S15 1c (Suurin ja pienin luku)	S14 13 (Newton, iterointi)	K14 6 (Jonon derivaatta)
S15 11 (10-järjestelmä)	K15 12 (Derivointi, iterointi)	K14 11 (Paloittain määritetty funktio, derivointi ja integroi
5,223880597	S15 12 (Polynomin jaollisuus)	K14 15* (Jatkuvien funktioiden skalaaritulo)
	K16 9.1 (Iterointi)	S14 11 (Raja-arvo, osoita)
	6,71641791	K15 13 (Erotusosamäärä, paloittain määritelty funktio)
		K15 15* (Summa, summan raja-arvo)
		S15 13 (Suppeneva jono)
		8,955223881

Kuva 6.3: Valtakunnalliset syventävät kurssit 11-13.